Rapport de magistère
MMFAI
(Magistère de Mathématiques Fondamentales et Appliquées et d'Informatique)

BLANCHET Bruno
Bruno.Blanchet@ens.fr

Octobre 1997

Remerciements

Je remercie les équipes enseignantes de l'ENS et du DEA de Sémantique, Preuves et Programmation, pour la formation dont elles m'ont fait bénéficier. Tous ont su me captiver et me passionner. M. Roberto Dicosmo mon tuteur et M. Guy Cousineau qui m'ont fait découvrir la programmation fonctionnelle, et M. Patrick Cousot qui m'a formé à la sémantique et à l'interprétation abstraite ont eu une influence déterminante sur mon orientation.

Mes remerciements vont également à l'équipe du laboratoire d'informatique de l'École Polytechnique, et en particulier M. Ian Mackie qui m'a encadré durant mon stage de maîtrise, toujours prêt à répondre à mes interrogations ou à me suggérer de nouvelles pistes et Mme Radhia Cousot qui m'a chaleureusement accueilli.

Je tiens à remercier toute l'équipe de l'INRIA Rocquencourt pour son accueil chaleureux pendant mon stage de DEA puis maintenant pendant ma thèse et en particulier M. Alain Deutsch qui a été très disponible pour m'encadrer tout au long de mon stage, et qui m'a apporté à la fois son aide pour résoudre les problèmes techniques et ses idées sur le sujet du stage.

Table des matières

I Introduction **7**
1 Curriculum vitæ magistère . . . 9
2 Présentation de mon thème de recherche . . . 10
2.1 Généralités . . . 10
2.2 Stage de DEA . . . 14
2.3 Thèse . . . 15

II Projet de maîtrise : Caml Light avec dimensions **19**

1 Utilisation du nouveau compilateur **21**
1.1 Syntaxe des dimensions . . . 21
1.2 Déclaration des dimensions . . . 22
1.3 La directive de compilation dim . . . 22
1.4 Modifications des librairies . . . 23
1.5 Contrôle des unités des entrées-sorties . . . 24
1.6 Exemple . . . 25

2 Algorithmes utilisés **27**
2.1 Format interne des dimensions . . . 27
2.2 Unification . . . 27
2.3 Filtrage . . . 28

3 Installation et accès aux sources **29**

III Stage de maîtrise : géométrie de l'interaction **31**

1 Le langage implémenté **33**

2 Les différentes machines utilisées **37**
2.1 La géométrie de l'interaction (GOI) . . . 37
2.2 Une optimisation : la pile de questions . . . 43
2.3 La machine de Krivine . . . 43
2.4 L'appel par valeur . . . 44
2.5 L'appel par nécessité . . . 45

3 Evaluation des performances de ces machines **47**
3.1 λ-calcul pur . . . 47
3.1.1 Fact . . . 48
3.1.2 Fibo . . . 50
3.1.3 g . . . 51
3.1.4 I . . . 52
3.2 Listes . . . 53

3.3 Calculs arithmétiques 56

4 Conclusion **61**

IV Stage de DEA : *Garbage Collection* statique **65**

1 Introduction **67**
1.1 Travaux associés 67

2 Analyse d'échappement **69**
2.1 Quelques notations 69
2.2 Le langage analysé 69
2.2.1 Syntaxe 69
2.2.2 Sémantique 70
2.3 Première version de l'analyse 71
2.4 Deuxième version plus approchée 89
2.5 Traitement du polymorphisme 93

3 Implémentation de l'analyse **97**
3.1 Description générale de l'algorithme 97
3.2 Calcul des hauteurs des types 97
3.3 Construction des équations sémantiques 98
3.4 Résolution 100
3.5 Transformation de programme 101
3.6 Complexité de l'analyse 103
3.7 Quelques détails techniques 103

4 Evaluation des performances obtenues **105**
4.1 Machines testées 105
4.2 Les programmes de test du compilateur 105
4.3 Le compilateur lui-même 113
4.4 Coq 113
4.5 Vitesse d'analyse 115
4.6 Améliorations futures 116

5 Conclusion **117**

Première partie

Introduction

1 Curriculum vitæ magistère

1994—1995

1re année à l'ENS et au MMFAI.

Licence et maîtrise d'informatique, mention Très bien.

J'ai assisté aux cours suivants, en informatique :

- Algorithmique (M. Jacques Stern),
- Programmation (M. Guy Cousineau),
- Calculabilité et complexité (M. Jacques Stern),
- Architectures et systèmes (MM. Philippe Matherat, Alain Mérigot et Jacques Beigbeder),
- Programmation logique (M. François Fages),
- Langages formels (M. Jean Berstel),
- Compilation (M. Patrick Cousot),
- Sémantique (M. Patrick Cousot),
- Calcul parallèle (M. Alain Trouvé),

en mathématiques :

- Analyse I (M. François Golse),
- Probabilités I (M. Jacod)

et à la frontière entre les deux :

- Logique (M. Jacques Stern),
- Combinatoire (M. Daniel Krob).

Le cours de programmation, qui m'a fait découvrir tout l'intérêt de la programmation fonctionnelle, a été déterminant pour la suite de mon orientation. La rencontre de mon tuteur Roberto Dicosmo a aussi contribué à mon intérêt pour les langages fonctionnels et pour la sémantique. C'est lui également qui m'a encadré pour mon projet de maîtrise, l'implémentation de types avec dimensions dans Caml-Light.

C'est le cours de sémantique qui m'a montré l'intérêt de l'interprétation abstraite pour l'analyse de programme et plus généralement pour toute l'étude théorique des langages de programmation.

Stage de maîtrise au LIX (Laboratoire d'informatique de l'École Polytechnique) avec M. Ian Mackie.

Sujet : implémentation de la géométrie de l'interaction.

Ce stage a aussi été l'occasion d'un exposé au séminaire sémantique et interprétation abstraite de M. Patrick Cousot.

1995—1996

2e année à l'ENS et au MMFAI.

DEA de Sémantique, Preuves et Programmation, mention Très bien, rang 1er.

Les cours de tronc commun étaient :

- Structures syntaxiques pour le calcul (Mme Thérèse Hardin),
- Preuves constructives (M. Gilles Dowek),
- Logique et modeles de Herbrand (M. Hubert Comon),
- Récursivité, catégories et domaines (M. Giuseppe Longo),
- Sémantique dénotationnelle (M. Roberto Dicosmo),
- Typage et programmation (M. Didier Rémy).

Les cours d'option que j'ai suivis comprenaient :

- Interprétation abstraite (MM. Alain Deutsch et Philippe Granger),
- Sous-typage et langages à objets (M. Guiseppe Castagna),
- Compilation des langages fonctionnels et impératifs (M. Xavier Leroy),
- Théorie des domaines (M. Pierre-Louis Curien),
- Concurrence et communication (M. Jean-Jacques Lévy),
- Démonstration automatique (M. Jean Goubault).

Stage de DEA à l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique) avec M. Alain Deutsch.

Sujet : *Garbage Collection* statique et analyse d'échappement.

Le cours d'interprétation abstraite a continué à beaucoup m'intéresser, et le sujet de stage proposé par Alain Deutsch m'a particulièrement attiré : il comprenait à la fois des aspects théoriques et la possibilité d'applications pratiques importantes.

Ce stage m'a permis de rédiger un article, *Escape Analysis : Correctness Proof, Implementation and Experimental Results*, à paraître dans *POPL'98 (ACM Symposium on Principles of Programming Languages)*.

J'ai également suivi le cours de magistère de Logique et Informatique, de MM. Vincent Danos et Ian Mackie.

1996—1997

3$^{\text{e}}$ année à l'ENS et au MMFAI

Agrégation de mathématiques, rang 24$^{\text{e}}$.

Conférences

LOMAPS'95 (Logical and Operational Methods in the Analysis of Programs and Systems) à Cambridge
POPL'97 (ACM Symposium on Principles of Programming Languages) à Paris
SAS'97 (Static Analysis Symposium) à Paris.

2 Présentation de mon thème de recherche

2.1 Généralités

Au niveau le plus général, mon thème de recherche est l'analyse de programme et ses applications : on cherche à déterminer automatiquement et statiquement des informations sur l'exécution des programmes. Pour cela, l'interprétation abstraite [CC77, CC79] donne les bases théoriques pour la justification de la correction des opérations et des approximations effectuées. On ne peut pas en général déterminer exactement les propriétés des programmes car la plupart d'entre elles sont indécidables (on le montre en général à partir de l'indécidabilité du problème de l'arrêt). Il faut alors faire des approximations. L'idée est de partir d'une sémantique exacte (ou concrète) du langage étudié et de définir une sémantique approchée (ou abstraite) qui ne retient que les propriétés sur lesquelles on souhaite obtenir de l'information.

Les propriétés concrètes sont représentées par les éléments d'un ensemble $\mathcal{P}^\natural$. Cet ensemble est muni d'une relation d'ordre $\leq$ où $c \leq c'$ exprime que la propriété c est plus précise que c'. On supposera dans la suite que cette relation fait de $\mathcal{P}^\natural$ un treillis complet, c'est-à-dire un ensemble partiellement ordonné par une relation $\leq$, tel que toute partie a une borne supérieure notée $\sqcup$ et une borne inférieure $\sqcap$. En particulier, un treillis complet L a un plus petit élément $\sqcup\emptyset = \sqcap L = \bot$ et un plus grand élément $\sqcap\emptyset = \sqcup L = \top$. On note $L(\leq, \bot, \top, \sqcup, \sqcap)$. Ainsi, l'ensemble des parties est un treillis complet pour l'inclusion : $\mathcal{P}(E)(\subseteq, \emptyset, E, \cup, \cap)$. Par exemple, les éléments de $\mathcal{P}^\natural$ peuvent-être des ensembles d'états ou des ensembles de traces maximales d'exécution. De même, on représente les propriétés abstraites par un treillis $\mathcal{P}^\sharp$. Le passage de la sémantique concrète à la sémantique abstraite se fait par l'intermédiaire d'une correspondance de Galois semi-duale (α, γ) :

$$\mathcal{P}^\natural \underset{\alpha}{\overset{\gamma}{\rightleftharpoons}} \mathcal{P}^\sharp$$

ce qui signifie que l'*abstraction* $\alpha : \mathcal{P}^\natural \to \mathcal{P}^\sharp$ et la *concrétisation* $\gamma : \mathcal{P}^\sharp \to \mathcal{P}^\natural$ sont telles que

$$\alpha(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \gamma(y)$$

Ces deux propriétés équivalentes expriment que y est une approximation correcte de la propriété concrète x. $\alpha(x)$ est la plus précise approximation de $x \in \mathcal{P}^\natural$ dans $\mathcal{P}^\sharp$. $\gamma(y)$ est l'élément le plus imprécis de $\mathcal{P}^\natural$ qui peut-être correctement approché par $y \in \mathcal{P}^\sharp$. On ajoute à cette définition la propriété suivante :

$$\alpha \circ \gamma = I_{\mathcal{P}^\sharp}$$

équivalente à la surjectivité de α, qui exprime intuitivement que $\mathcal{P}^\natural$ est plus précis que $\mathcal{P}^\sharp$ (tous les éléments du treillis abstrait ont une propriété concrète qui leur correspond).

La conception de l'analyse consiste alors à définir α ou γ (l'une est connue dès que l'autre est définie), puis à calculer pour chaque construction du langage analysé l'approximation correspondante. Il existe des moyens de construction systématique de domaines abstraits avec les abstractions et concrétisations correspondantes. Par exemple, si on considère les correspondances de Galois semi-duales :

$$\mathcal{P}_1^\natural \underset{\alpha_1}{\overset{\gamma_1}{\rightleftharpoons}} \mathcal{P}_1^\sharp \text{ et } \mathcal{P}_2^\natural \underset{\alpha_2}{\overset{\gamma_2}{\rightleftharpoons}} \mathcal{P}_2^\sharp$$

alors

$$\mathcal{P}_1^\natural \times \mathcal{P}_2^\natural \underset{\alpha_3}{\overset{\gamma_3}{\rightleftharpoons}} \mathcal{P}_1^\sharp \times \mathcal{P}_2^\sharp \text{ où } \alpha_3(c_1, c_2) = (\alpha_1(c_1), \alpha_2(c_2)) \text{ et } \gamma_3(a_1, a_2) = (\gamma_1(a_1), \gamma_2(a_2))$$

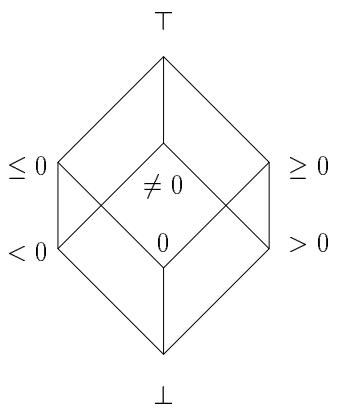
$$X \to \mathcal{P}_1^\natural \underset{\alpha_4}{\overset{\gamma_4}{\rightleftharpoons}} X \to \mathcal{P}_1^\sharp \text{ où } \alpha_4(\phi^\natural) = \alpha_1 \circ \phi^\natural \text{ et } \gamma_4(\phi^\sharp) = \gamma_1 \circ \phi^\sharp$$

X étant un ensemble et $X \to \mathcal{P}_1^\natural$ le treillis des fonctions de X dans $\mathcal{P}_1^\natural$ ordonné point par point à l'aide de l'ordre sur $\mathcal{P}_1^\natural$.

De plus, la meilleure approximation de l'opérateur concret $\phi^\natural : \mathcal{P}_1^\natural \to \mathcal{P}_2^\natural$ est $\phi^\sharp : \mathcal{P}_1^\sharp \to \mathcal{P}_2^\sharp$ définie par :

$$\phi^\sharp = \alpha_2 \circ \phi^\natural \circ \gamma_1$$

Exemple 1 La règle des signes fournit un exemple élémentaire d'interprétation abstraite : considérons le langage formé des quatre opérations arithmétiques $+, -, \times, /$ et des constantes entières. On souhaite déterminer le signe du résultat d'une expression sans le calculer explicitement. Pour cela, on considère le treillis concret $\mathcal{P}^\natural = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ ordonné par inclusion et le treillis abstrait $\mathcal{P}^\sharp = \mathit{Signe}$ représenté sur la figure ci-dessous (deux sommets a et b du graphe sont liés avec a en dessous de b si et seulement si $a < b$).



$+^\sharp$	$\bot$	0	<0	>0	≤ 0	≥ 0	$\neq 0$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
0	$\bot$	0	<0	>0	≤ 0	≥ 0	$\neq 0$	$\top$
<0	$\bot$	<0	<0	$\top$	<0	$\top$	$\top$	$\top$
>0	$\bot$	>0	$\top$	>0	$\top$	0	$\top$	$\top$
≤ 0	$\bot$	≤ 0	<0	$\top$	≤ 0	$\top$	$\top$	$\top$
≥ 0	$\bot$	≥ 0	$\top$	>0	$\top$	≥ 0	$\top$	$\top$
$\neq 0$	$\bot$	$\neq 0$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

On définit la concrétisation

$$\gamma(\bot) = \emptyset \qquad \gamma(0) = \{0\} \qquad \gamma(>0) = \{1, 2, ...\} \quad \gamma(<0) = \{...-2, -1\}$$
$$\gamma(\geq 0) = \{0, 1, 2, ...\} \quad \gamma(\leq 0) = \{..., -2, -1, 0\} \quad \gamma(\neq 0) = \mathbb{Z} - \{0\} \qquad \gamma(\top) = \mathbb{Z}$$

et l'abstraction

$$\alpha(\emptyset) = \bot$$
$$\alpha(x) = (>0) \text{ si } x \subseteq \{1, 2, ...\} \text{ et } x \neq \emptyset$$
$$\alpha(x) = (\geq 0) \text{ si } 0 \in x \subseteq \{0, 1, 2, ...\} \text{ et } x \neq \{0\}$$
$$\alpha(x) = (\neq 0) \text{ sinon, si } 0 \notin x$$

$$\alpha(\{0\}) = 0$$
$$\alpha(x) = (<0) \text{ si } x \subseteq \{..., -2, -1\} \text{ et } x \neq \emptyset$$
$$\alpha(x) = (\leq 0) \text{ si } 0 \in x \subseteq \{0, -1, -2, ...\} \text{ et } x \neq \{0\}$$
$$\alpha(x) = \mathbb{Z} \text{ sinon.}$$

En notant $+^\sharp$ la meilleure approximation de $+$ et $\times^\sharp$ celle de $\times$, on a par exemple :

$$+^\sharp(\geq 0, > 0) = \alpha(\gamma(\geq 0) + \gamma(> 0)) = \alpha(\{0,1,2,...\} + \{1,2,...\}) = \alpha(\{1,2,...\}) = (> 0)$$

$$\times^\sharp(\geq 0, > 0) = \alpha(\gamma(\geq 0) \times \gamma(> 0)) = \alpha(\{0,1,2,...\} \times \{1,2,...\}) = \alpha(\{0,1,2,...\}) = (\geq 0)$$

J'ai donné ci-dessus la table complète pour l'addition. Pour la multiplication, on retrouve ainsi la règle des signes usuelle.

La sémantique du langage de départ est en général définie par itération de point fixe (pour pouvoir définir la sémantique des boucles et des fonctions récursives). Pour fixer les idées, on peut supposer qu'elle est définie par un ensemble d'états S qui sont des paires (point de programme, état de la mémoire), et une fonction de transition $\tau : S \to S$ qui à chaque état associe l'état suivant au cours de l'exécution [Cou81]. L'ensemble des états atteints au cours de l'exécution si l'état initial est s_0 est

$$\{\tau^n(s_0) | n \geq 0\}$$

(où τ^n est la composée n fois de τ). Les descendants d'un ensemble S_0 d'états initiaux sont alors en notant lfp le plus petit point fixe

$$\cup_{n \geq 0} \tau^n(S_0) = \mathrm{lfp}(\lambda S_1.[S_0 \cup \tau(S_1)])$$

(où on a étendu τ aux ensembles d'états). Autrement dit, c'est la plus petite solution pour l'inclusion de l'équation

$$S_1 = S_0 \cup \tau(S_1)$$

Ici, le treillis concret est $\mathcal{P}(S)$ ordonné par inclusion. Il convient pour toutes les propriétés qui ne dépendent que de l'état (propriétés dites invariantes). On peut avoir à considérer des ensembles de traces d'exécution pour déterminer des propriétés plus complexes (par exemple savoir si une variable sera lue, ou si elle a été initialisée avant d'être utilisée).

Pour calculer les valeurs abstraites aux différents points de programme, une itération correspondante doit être effectuée dans le treillis abstrait. La correction du procédé est assurée par le résultat suivant :

$$\alpha(\mathrm{lfp}(f)) \leq \mathrm{lfp}(\alpha \circ f \circ \gamma)$$

(on n'a pas toujours égalité). Ceci montre que le plus petit point fixe de la fonction abstraite $\alpha \circ f \circ \gamma$ est une approximation correcte du plus petit point fixe de la fonction concrète f. Les calculs de point fixe peuvent donc se faire dans le treillis abstrait sans repasser par le treillis concret.

L'existence du point fixe est assurée par le théorème de Tarski :

Théorème 2 (Tarski) *L'ensemble des points fixes d'un opérateur monotone f sur un treillis complet $L(\leq, \bot, \top, \sqcup, \sqcap)$ est un treillis complet non vide, ordonné par $\leq$. Le plus petit point fixe de f est*

$$\mathrm{lfp}(f) = \sqcap\{x \in L | f(x) \leq x\}$$

et son plus grand point fixe est

$$\mathrm{gfp}(f) = \sqcup\{x \in L | x \leq f(x)\}$$

Ce théorème n'est pas constructif : on obtiendrait en fait le plus petit point fixe par itération transfinie de f à partir de $\bot$. Si on définit f^λ, où λ est un ordinal, par :

$$\begin{aligned} f^0(x) &= \bot \\ f^{\lambda+1}(x) &= f(f^\lambda(x)) \\ f^\lambda(x) &= \sqcup\{f^\beta(x) | \beta < \lambda\} \text{ si } \lambda \text{ est un ordinal limite,} \end{aligned}$$

cette suite transfinie est stationnaire et sa limite est $\mathrm{lfp}(f)$.

Si f est continu, c'est-à-dire pour toute chaîne $C \subseteq L$, $f(\sqcup C) = \sqcup f(C)$, on sait que l'itération s'arrête à l'ordinal ω :

Théorème 3 (Kleene) *Si f est un opérateur continu sur $L(\leq, \bot, \top, \sqcup, \sqcap)$* [1],

$$\mathrm{lfp}(f) = \sqcup\{f^i(\bot) : i \in \mathbb{N}\}$$

La terminaison est assurée soit directement si le treillis abstrait a des chaînes ascendantes de longueur finie, soit par l'intermédiaire de procédés d'accélération de la convergence (élargissement, rétrécissement, voir [CC92b]).

Exemple 4 Reprenons l'exemple du treillis des signes dans un langage un peu plus étendu, où on a aussi des structures de contrôle, et considérons l'exemple de programme suivant (dans la syntaxe de Pascal) [DG96] :

```
   x := 0;
0:
   while x < y do
   begin
       1:
        x := x+1;
       2:
   end
3:
```

On définit la sémantique du programme comme ci-dessus, où l'état mémoire est un couple (valeur de x, valeur de y). Pour simplifier, on suppose que le programme travaille avec des entiers illimités. On considère comme abstraction de l'état le couple formé de la valeur abstraite de x dans le treillis des signes. Le treillis abstrait est formé des fonctions qui à chaque point de programme associent la valeur abstraite de x, ordonné point par point. $PP = \{0, ..., 3\}$ est l'ensemble des points de programme (ils sont notés par des étiquettes dans l'exemple de programme ci-dessus). On a donc

$$\begin{aligned}
&S = PP \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\
&\mathcal{P}^\natural = \mathcal{P}(S) \\
&\mathcal{P}^\sharp = PP \to \mathit{Signe} \\
&\alpha'' : \mathcal{P}^\natural \to \mathcal{P}^\sharp \\
&\alpha''(S_1) = \lambda p. \bigsqcup_{(p,x,y) \in S_1} \alpha(x)
\end{aligned}$$

où α est l'abstraction $\mathbb{Z} \to \mathit{Signe}$.

On note $\{p_i \mapsto a_i, ...\}$ une fonction $PP \to \mathcal{P}^\sharp$ définie point par point. Cette fonction vaut $\bot$ aux points où elle n'est pas explicitement définie. En itérant la fonction $\lambda a.a_0 \sqcup \tau^\sharp(a)$ où $\tau^\sharp : \mathcal{P}^\sharp \to \mathcal{P}^\sharp$ est la fonction de transition abstraite :

$$\begin{aligned}
&\tau^\sharp(\{0 \mapsto x^\sharp\}) = \tau^\sharp(\{2 \mapsto x^\sharp\}) = \{3 \mapsto x^\sharp, 1 \mapsto x^\sharp\} \\
&\tau^\sharp(\{1 \mapsto x^\sharp\}) = \{2 \mapsto x^\sharp +^\sharp (> 0)\} \\
&\tau^\sharp(a) = \bigsqcup_{p \in PP} \tau^\sharp(\{p \mapsto a(p)\})
\end{aligned}$$

on obtient les valeurs abstraites suivantes pour x :

1. L'hypothèse de treillis complet est plus forte que nécessaire ici : il suffit d'avoir un plus petit élément $\bot$ et que toute chaîne croissante ait une borne supérieure. L est alors appelé un ordre partiel complet (CPO)

Points de programme	Itérations				
	Valeurs initiales	1re	2e	3e	4e
0	0	0	0	0	0
1	$\perp$	0	0	≥ 0	≥ 0
2	$\perp$	$\perp$	> 0	> 0	> 0
3	$\perp$	0	0	≥ 0	≥ 0

Le point fixe est atteint après 4 itérations. On obtiendrait des résultats plus précis en remarquant que si on passe au point 3, $x \geq y$, ce qui peut donner plus d'informations sur le signe de x.

Des interprétations abstraites plus complexes, mais qui apportent des informations beaucoup plus intéressantes, sont par exemple la détermination des relations affines [Kar76], l'analyse de congruences linéaires [Gra91], qui sont utilisées pour l'analyse d'alias [Deu94], ou encore l'analyse de congruence sur les rationnels [Gra97].

Au niveau théorique, on peut montrer que les sémantiques d'un programme se déduisent les unes des autres par interprétation abstraite [CC95], que les types sont en fait des interprétations abstraites [Cou97].

Dans certains cas, il est difficile de rentrer totalement dans le cadre des correspondances de Galois. On peut alors utiliser des structures plus générales mais moins puissantes, par exemple en ne considérant que la concrétisation et pas l'abstraction, ou bien en se contentant d'une relation de correction de l'approximation [CC92a]. C'est le cas par exemple pour les contraintes linéaires [CH78].

Les informations ainsi collectées peuvent avoir des utilisations diverses : optimisation du code compilé, vérification de programme. Par exemple, on peut déterminer des points de programme susceptibles de causer un dépassement de capacité entier ou flottant ou de bornes de tableau. Les applications que j'envisage personnellement sont davantage dirigées vers l'optimisation, et concernent plus précisément la gestion de la mémoire.

2.2 Stage de DEA

Mon stage de DEA a consisté en l'étude de l'analyse d'échappement et de l'allocation en pile en Caml Special Light (CSL), un dialecte de ML. En effet, pour gérer les données, CSL utilise un glaneur de cellules (GC), qui détecte automatiquement les données devenues inutiles et les désalloue. Ceci permet de libèrer le programmeur du souci de la gestion de la mémoire mais le mécanisme de GC est couteux en temps, ce qui suggère d'utiliser des méthodes d'allocation plus efficaces. On souhaite cependant que ces méthodes restent automatiques pour éviter la source de nombreuses erreurs qu'est la gestion manuelle de la mémoire.

L'idée de ce stage était d'utiliser l'allocation en pile comme autre méthode d'allocation. Cependant, toutes les données ne peuvent pas être allouées en pile, car elles doivent être libérées dans l'ordre inverse de leur allocation. Il est donc nécessaire d'effectuer une analyse de programme, appelée analyse d'échappement, pour déterminer quelles sont les données allouables en pile : celles dont la durée de vie est inférieure à la portée statique. Cette analyse peut se faire par interprétation abstraite. Ensuite, il faut transformer le programme en conséquence pour effectuer l'allocation en pile. Pour l'appliquer à des programmes importants, il a fallu veiller à limiter la complexité de l'analyse et de la transformation de programme : on est parvenu à l'implémenter en $\mathcal{O}(n \log^2 n)$.

Les résultats expérimentaux montrent qu'on obtient ainsi une optimisation de 5 à 20 % sur beaucoup de programmes. L'amélioration obtenue dépend de façon importante des caractéristiques du processeur utilisé (en particulier de la taille du cache mémoire). C'est pourquoi on a effectué une comparaison entre différentes machines : SparcStation 5, Alpha, Pentium Pro. Cette amélioration vient principalement de la meilleure localité des données quand elles sont allouées en pile, ce qui améliore l'utilisation du cache. On parvient à allouer 25% des données en pile dans le démonstrateur automatique Coq, ce qui est un résultat très satisfaisant.

Mon rapport donne beaucoup plus détails sur cette analyse, l'implémentation efficace qui en a été faite et les résultats expérimentaux qui ont été obtenus.

2.3 Thèse

Mon sujet de thèse se situe dans le prolongement de mon stage de DEA. L'objectif est d'utiliser de l'allocation en pile pour gérer les données en Java, comme on l'a déjà fait avec CSL. En effet, le langage Java, dont l'utilisation se répand de plus en plus, en particulier pour la programmation des applications utilisées à travers Internet, possède d'incontestables avantages : il est très portable, sûr ce qui est indispensable pour que les utilisateurs puissent utiliser sans risque le code qu'ils trouvent sur le réseau. Comme CSL, il utilise un GC pour gérer la mémoire. Cependant, il souffre de performances décevantes au niveau de sa vitesse d'exécution, dues en particulier au GC. Pour Java, l'automatisation de la gestion de la mémoire est maintenant un impératif, car on ne peut pas laisser au programmeur la responsabilité de décider quand une donnée doit être libérée : ceci est important pour la sécurité du système, car toute erreur dans ce domaine est fatale pour le fonctionnement du programme.

De nouvelles questions sont à résoudre pour adapter le travail précédent à Java :

- comme Java est un langage orienté objets, il faut, avant d'effectuer l'analyse d'échappement proprement dite, déterminer les méthodes effectivement appelées par le programme, pour savoir de quelles données elles nécessitent la conservation ;

- Java est d'abord compilé en bytecode et les impératifs de sécurité exigent que l'exécution de ce bytecode soit sans danger pour le système. La correction des allocations en pile est indispensable pour assurer cette sécurité. Il faut donc soit vérifier cette correction au moment de l'exécution du bytecode, soit effectuer l'analyse sur le bytecode lui-même, pour qu'un pirate ne puisse pas introduire de fausses allocations en pile dans du bytecode de sa fabrication ;

- il faut effectuer une analyse plus précise des effets de l'affectation, car Java est un langage impératif, dans lequel l'affectation est beaucoup plus utilisée qu'en ML ;

- enfin, la présence du parallélisme devra être prise en compte ce qui complique l'analyse.

Tout ceci nécessitera la mise au point de nouvelles techniques d'analyse. La vitesse d'analyse sera aussi un souci majeur, de façon à pouvoir appliquer ces optimisations aux plus grosses applications sans que le temps de compilation devienne prohibitif.

La compilation de code Java se passe en deux étapes : tout d'abord, on traduit le code source en bytecode, puis plusieurs méthodes sont possibles pour exécuter ce bytecode. La première chronologiquement, celle utilisée par le *Java Development Kit* de *Sun*, est l'interprétation. Ici, on ne considérera pas cette méthode car le surcoût dû à l'interprétation est très important et risquerait de rendre négligeable toute amélioration dans l'allocation des données. Une autre méthode est d'utiliser un compilateur *Just in Time* : le code est compilé avant chaque exécution. Cette méthode donne des performances nettement meilleures (l'exécution est une dizaine de fois plus rapide). Enfin, on peut aussi traduire l'application en un code exécutable directement, comme cela est fait pour les programmes C. Notre travail pourrait s'appliquer à ces deux dernières techniques.

On peut espérer des améliorations de performances importantes, car la technique de GC utilisée en Java, le marquage-balayage, est peu efficace, en particulier pour les données à courte durée de vie, qui sont souvent allouables en pile. En effet, cette technique de GC parcourt d'abord les données vivantes pour les marquer comme utiles, puis parcourt toutes les données stockées, vivantes ou non, pour libérer les données non marquées. De ce fait, on ne profite pas du fait qu'une donnée à courte durée de vie est presque toujours morte au moment du GC pour éviter de la parcourir et ainsi économiser du temps de calcul.

On peut résumer ainsi le plan de la thèse, qui comprend à la fois des parties théoriques et pratiques :

- ajouter à un compilateur Java la possibilité d'allouer en pile, en effectuant les adaptations nécessaires du GC ;

- concevoir et implémenter une analyse d'échappement pour déterminer les données allouables en pile. Cette analyse devra aussi déterminer aussi précisément que possible la durée de vie des données, du façon à les libérer dès que possible, pour économiser de l'espace mémoire ;

- définir des critères de correction et de complétude de cette analyse et justifier sa correction et sa complétude. Cette étude partira d'une sémantique de la machine virtuelle Java [LY96], comme celle de [Qia97] par exemple. L'étude théorique de Java est en effet facilitée par la présence de spécifications précises [GJS96] ;
- effectuer une étude expérimentale précise des améliorations obtenues pour comprendre d'où elles viennent exactement (des causes possibles d'accéleration de l'exécution sont la réduction du temps d'allocation, la diminution du temps de GC, l'amélioration de la localité des données qui accélère les accès en mémoire, en tirant un meilleur profit du cache [CMT94]). Ces améliorations dépendent des caractéristiques de la machine testée : vitesse du processeur et de la mémoire, taille des caches. On effectuera donc une comparaison entre différents ordinateurs. On peut aussi espérer une diminution de la taille mémoire occupée, si les données en pile sont libérées plus tôt qu'avec le GC.

D'autres techniques d'optimisation de l'allocation s'offrent également à nous : on peut déterminer statiquement le moment auquel une donnée deviendra inutile de façon à la désallouer sans devoir parcourir toutes les données existantes comme le fait le GC ; cela permettrait aussi de réutiliser aussitôt l'espace laissé libre par un objet devenu inutile, si on alloue à ce moment un autre objet de même taille. Enfin, on pourrait préallouer les résultats des fonctions en pile, plutôt que de les allouer dans le tas géré par le GC. Le codage en ligne des petites fonctions permettrait également d'augmenter les opportunités d'allocation en pile. En effet, un objet alloué dans la fonction, et dont la durée de vie se prolonge au delà du point de retour de cette fonction, pourrait ainsi être malgré tout alloué en pile.

Toutes ces pistes sont donc à explorer pour tirer le meilleur profit de l'allocation en pile en Java, et espérons-le en faire un langage non seulement sûr et portable, mais aussi très performant.

Références

[CC77] Patrick Cousot et Radhia Cousot. – Abstract interpretation: a unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints. *In : Conference Record of the 4th Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 238 – 252. – Los Angeles, California, janvier 1977.

[CC79] Patrick Cousot et Radhia Cousot. – Systematic Design of Program Analysis Frameworks. *In : Conference Record of the Sixth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 269 – 282. – San Antonio, Texas, 29-31 janvier 1979.

[CC92a] Patrick Cousot et Radhia Cousot. – Abstract Interpretation Frameworks. *Journal of Logic and Computation*, vol. 2, n° 4, août 1992, pp. 511–547.

[CC92b] Patrick Cousot et Radhia Cousot. – Comparing the Galois Connection and Widening/Narrowing Approaches to Abstract Interpretation. *In : Proceedings of the fourth international symposium PLILP'92 (Programming Language Implementation and Logic Programming)*, éd. par Maurice Bruynooghe et Martin Wirsing. pp. 269–295. – Springer-Verlag.

[CC92c] Patrick Cousot et Radhia Cousot. – Inductive definitions, semantics and abstract interpretation. *In : Conference Record of the 19th ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Programming Languages*. pp. 83–94. – Albuquerque, New Mexico, 1992.

[CC95] Patrick Cousot et Radhia Cousot. – Compositional and Inductive Semantic Definitions in Fixpoint, Equational, Constraint, Closure-condition, Rule-based and Game Theoretic Form. *In : Conference on Computer-Aided Verification, 7th International Conference, CAV '95*, éd. par P. Wolper. pp. 293–308. – Liège, Belgium, 3–5 juillet 1995.

[CH78] Patrick Cousot et Nicolas Halbwachs. – Automatic Discovery of Linear Restraints Among Variables of a Program. *In : Conference Record of the Fifth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 84–96.

[CMT94] Steve CARR, Kathryn S. MCKINLEY et Chau-Wen TSENG. – Compiler Optimizations for Improving Data Locality. *In : Sixth International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems*, pp. 252 – 262.

[Cou81] Patrick COUSOT. – *Semantic Foundations of Program Analysis*, chap. 10. – Prentice Hall, 1981.

[Cou97] Patrick COUSOT. – Types as Abstract Interpretations. *In : 24th ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'97)*, pp. 316–331. – Paris, France, janvier 1997.

[Deu94] Alain DEUTSCH. – Interprocedural May-Alias Analysis for Pointers: Beyond k-limiting. *In : Proceedings of the SIGPLAN '94 Conference on Programming Language Design and Implementation*. pp. 230 – 241. – ACM Press.

[DG96] Alain DEUTSH et Philippe GRANGER. – Cours d'interprétation abstraite du DEA de sémantique, preuves et programmation. – 1996.

[GJS96] James GOSLING, Bill JOY et Guy STEELE. – *The Java^{TM} Language Specification*. – Addison-Wesley, 1996.

[Gra91] Philippe GRANGER. – Static Analysis of Linear Congruence Equalities among Variables of a Program. *In : Proceedings of the International Joint Conference on Theory and Practice of Software Development (TAPSOFT'91)*, pp. 169–192.

[Gra97] Philippe GRANGER. – Static Analyses of Congruence Properties on Rational Numbers. *In : 4th International Static Analysis Symposium (SAS'97)*, éd. par Pascal Van HENTENRYCK. pp. 278–292. – Springer.

[Kar76] Michael KARR. – Affine Relationships Among Variables of a Program. *Acta Informatica*, vol. 6, 1976, pp. 133–151.

[LY96] Tim LINDHOLM et Frank YELLIN. – *The Java^{TM} Virtual Machine Specification*. – Addison-Wesley, 1996.

[Qia97] Zhenyu QIAN. – A Formal Specification of Java$^{\text{TM}}$ Virtual Machine Instructions.

Deuxième partie

Projet de maîtrise : Inférence de types avec dimensions sous Caml Light

Sous la direction de M. Roberto DiCosmo
Roberto.Dicosmo@ens.fr

Chapitre 1

Utilisation du nouveau compilateur

Ce projet consiste à modifier le compilateur Caml Light, pour lui permettre de contrôler les dimensions des données manipulées. Les vérifications de type effectuées par le compilateur sont donc renforcées, et les erreurs peuvent être signalées à l'utilisateur. Ce compilateur est basé sur Caml Light version 0.7 béta 1.

1.1 Syntaxe des dimensions

La grammaire des expressions dimensionnelles est définie ainsi (voir le fichier **parser.mly** pour tous les détails, ainsi que le fichier **dimen.ml** pour la conversion de l'arbre rendu par la grammaire en un arbre plus proche du programme) :

```
Dim : Dim * Dim
    | Dim / Dim
    | Dim ** Rat (* Elévation à un exposant rationnel *)
    | Identificateur de dimension
    | Variable de dimension
    | 1         (* Pour les données sans dimension *)
    | ( Dim )

(* Grammaire pour les nombres rationnels *)
Rat : Entier
    | Rat * Rat
    | Rat / Rat
    | - Rat
    | Rat - Rat
    | Rat + Rat
    | ( Rat )


Opt_dim_par :
       [ Dim (, Dim)* ]
     |

Dim_params :
      [ Variable de dimension (, Variable de dimension)* ]
     |
```

On peut donc effectuer sur les dimensions les opérations multiplicatives et l'élévation à un exposant rationnel. On a choisi des exposants rationnels plutôt qu'entiers, car ces derniers sont parfois

insuffisants, par exemple pour les constantes de vitesse des réactions chimiques, ou pour les fonctions d'onde en mécanique quantique. De plus, les exposants rationnels sont plus faciles à implémenter que les exposants entiers.

Les variables de dimensions sont notées comme les variables de type ('identificateur).

Dans les déclarations de types, les paramètres dimensionnels viennent après les éventuelles paramètres de type et avant le nom du constructeur. (Ceci évite toute ambiguité pour savoir à quel type se rapporte le paramètre).

Les seuls constructeurs prédéfinis qui prennent des arguments dimensionnels sont `int` et `float`. L'utilisateur peut définir ses propres types dimensionnés à partir de ceux-ci. Par exemple :

```
type ['d] complex = {re : ['d] float; im: ['d] float};;

type 'a ['d] abbrev == 'a * ['d] complex;;
```

Les paramètres dimensionnels sont facultatifs. Si certains paramètres manquent, le comportement du compilateur varie suivant les options de compilation : voir ci-dessous.

1.2 Déclaration des dimensions

Tous les identificateurs de dimension doivent être déclarés par l'instruction

```
dimension nom(unite) ( and nom(unite) )* ;;
```

Exemple : `dimension length(m) ; ;`

Après cette déclaration, le mot `length` est utilisable dans les types. Par exemple : `type length_t == [length] float ; ;`

Le mot `m` est alors une constante de type `[length] float` et qui a pour valeur numérique 1. D'autres unités peuvent être déclarées en écrivant par exemple : `let km = 1000. *. m` . Si on souhaite utiliser des unités entières, il suffit de les convertir avec `int_of_float`.

L'unité entre parenthèses est facultative. Si on ne définit pas d'unité en créant la dimension, on peut en définir une plus tard en écrivant :

```
#open "dfloat";;
dimension length;;

let m = (fone : [length] float);;
```

(Voir plus loin la définition de `fone` dans le module **dfloat**).

Les déclarations de dimensions effectuées dans un module et destinées à être exportées doivent être faites dans la partie interface (fichier **.mli**). Elles seront automatiquement prises en compte dans l'implémentation, et ne doivent donc pas y être répétées.

Des déclarations classiques d'unités et de constantes physiques ont été enregistrées dans le module **dimens**.

1.3 La directive de compilation dim

Cette directive a été ajoutée pour contrôler le fonctionnement par défaut du compilateur. Elle comporte 4 options :

#dim "warning" Quand un paramètre dimensionnel manque, un message d'avertissement est affiché, mais la compilation continue.

#dim "nowarning" Le contraire du précédent : aucun message n'est émis, et la compilation se poursuit.

#dim "defnodim" Par défaut, les grandeurs sont sans dimension. Ainsi, quand un paramètre dimensionnel est absent, il est équivalent à `[1]`. Les constantes numériques sont sans dimension

([1] int ou [1] float). La variable de contrôle d'une boucle for est sans dimension. Les données dans les chaînes de formats sont sans dimension.

#dim "defanydim" Le contraire du précédent. Les grandeurs dont la dimension n'est pas spécifiée sont de dimension quelconque (['d] int ou ['d] float).

L'état par défaut est nowarning, defnodim. Ceci est nécessaire pour obtenir une compilation sans faille des programmes réalisés pour l'ancienne version du compilateur. Par exemple, une construction comme

```
let x=ref 0
```

doit pouvoir être utilisée, ce qui implique que la constante entière 0 est sans dimension (les références polymorphes sont refusées). Pour que l'interface soit compatible avec l'implémentation, il faut alors que int et float soient par défaut sans dimension.

1.4 Modifications des librairies

Les anciennes librairies **float** et **int** ne sont plus adaptées pour les dimensions : elles ne sont capables de manipuler que des grandeurs sans dimension.

C'est pourquoi deux nouvelles librairies **dfloat** et **dint** ont été créées. Elles traitent correctement les dimensions.

Ces librairies définissent aussi de nouvelles fonctions spécifiques aux dimensions :

zero : Constante 0 de dimension quelconque. Utile pour définir des fonctions polymorphes (la valeur absolue par exemple).

one : Constante 1 de dimension quelconque. Elle permet de passer outre tout contrôle de dimension. A utiliser avec précaution donc.

nodim : Fonction à un argument qui assure que cet argument est sans dimension et le rend.

anydim : Fonction qui prend un argument de dimension quelconque, et rend la même valeur numérique, mais dans une autre dimension. Elle passe outre tout le contrôle de dimensions. A utiliser avec précaution donc.

Ces fonctions sont définies sous le nom indiqué dans le module **dint** et à la fois sous ce nom, et sous un deuxième nom obtenu en ajoutant un f au début dans le module **dfloat**. Ainsi en ouvrant dans l'ordre

```
#open "dfloat";;
#open "dint";;
```

on accède à la fonction entière par zero, one, ... et à la fonction flottante par fzero, fone, ... On peut avoir des noms plus simples pour les fonctions flottantes si on n'utilise qu'elles en réouvrant **dfloat** après **dint**.

J'ai choisi de dimensionner les fonctions logiques bit à bit ainsi :

- lor est dimensionnée additivement :

```
prefix lor : ['d] int -> ['d] int -> ['d] int
```

- land et lxor sont dimensionnées multiplicativement :

```
prefix land : ['d1] int -> ['d2] int -> ['d1 * 'd2] int
prefix lxor : ['d1] int -> ['d2] int -> ['d1 * 'd2] int
```

Ce choix est bien sûr discutable, mais je pense que de toute façon, il ne devrait pas être trop gênant, car ces fonctions sont utilisées essentiellement avec des grandeurs sans dimensions.

La fonction `power`, notée encore `prefix **` du module **float** pose des problèmes de dimensionnement : la dimension du résultat est fonction de la VALEUR de l'exposant, ce qui n'est normalement par toléré. De plus, pour que cela puisse être correct, cet exposant doit être une constante rationnelle. On aurait pu faire un traitement spécial dans le compilateur, mais tout s'écroulerait en cas de redéfinition par l'utilisateur de **. Le choix effectué est le plus simple : `power` utilise normalement des arguments sans dimension. Si on veut traiter des arguments avec dimension, on a deux méthodes :

- Passer outre le contrôle des dimensions et poser

  ```
  #open "dfloat";;
  let (powera_b : ['d] float -> ['d ** (a/b)] float) =
    fun x -> fanydim(fanydim(x) ** (a. /. b.);;
  ```

  où a et b sont des constantes entières.

- Définir une fonction spécifique, dans le cas d'élévation à un exposant entier (dans ce cas, de toute façon, la méthode utilisant ** est très peu efficace). Par exemple :

  ```
  let sqr x = x * x;;
  let power5 x = sqr(sqr(x)) * x;;
  ```

  A cet effet, j'ai rajouté la définition de `sqr` dans le module **dfloat**, car je pense que cette fonction sera d'usage courant.

1.5 Contrôle des unités des entrées-sorties

Les fonctions `print_int`, `print_float`, `read_int`, `read_float` rendent ou prennent des valeurs sans dimension. Le programme doit fixer l'unité dans laquelle il veut la valeur.

Par exemple :

```
#open "dfloat";;
#open "dimens";;

print_string "Entrez la longueur en m :";
let x=read_float() *. m
in  print_string "La longueur en km est :";
    print_float (x /. km);;
```

On aurait aussi pu imaginer de fixer uniquement la dimension dans le programme, l'utilisateur entrant lui-même l'unité voulue. Il aurait alors fallu faire un analyseur syntaxique qui connaisse les différentes unités entrées dans le programme, et qui vérifie que la donnée entrée a bien la dimension voulue. Il faudrait alors une déclaration spécifique pour les unités dérivées, pour que le programme puisse les distinguer des constantes numériques ordinaires.

On pourrait faire un système analogue pour l'affichage, le programme choisisant lui-même l'unité à utiliser pour l'affichage. Un tel programme serait certes commode, mais assez compliqué à réaliser et contraire à l'esprit de Caml qui veut que le typage soit entièrement vérifié à la compilation.

Dans le cas particulier du toplevel, j'ai fait les modifications nécessaires pour que le programme affiche les données dimensionnées avec leur dimension dans le type, et l'unité associée avec la valeur, quand une unité a été définie avec la dimension.

Attention ! Cette fonction d'affichage des unités ne respecte pas la syntaxe imposée à l'utilisateur pour la saisie de ces unités. En particulier, elle utilise ** avec les unités, alors que cette fonction est réservée aux grandeurs sans dimension. D'autre part, elle ne tient pas compte des modules ouverts : Elle écrit toujours * et jamais *. que les grandeurs soient réelles ou entières, et que les modules **dfloat** et **dint** soient ouverts ou non. Elle utilise les unités flottantes, même si les grandeurs considérées sont

entières. Quand elle ne peut déterminer l'unité voulue, soit parce que la grandeur est de dimension polymorphe (pour `zero` et `one`), ou que l'unité n'a pas été déclarée dans `dimension dim(unite) ; ;`, elle affiche `standard unit(s)` à la place. Par exemple :

```
##open "dimens";;
##open "dfloat";;
#m;;
- : [length] float = 1.0 * m
#sqrt(weber);;
- : [length * mass ** (1 / 2) * intensity ** (1 / -2) * time ** (-1)] float =
1.0 * m * kg ** (1 / 2) / A ** (1 / 2) / s
#int_of_float m;;
- : [length] int = 1 * m
#zero;;
- : ['a] float = 0.0 standard unit(s)
##open "dint";;
#dimension longueur;;
Dimension longueur defined.
#let long=100 * (one : [longueur] int);;
long : [longueur] int = 100 standard unit(s)
```

Cet affichage a été implanté juste pour que le système ait l'air correct du point de vue du physicien (les valeurs numériques doivent toujours être accompagnées de leurs unités), mais il reste beaucoup de progrès à faire pour obtenir quelque chose de tout à fait satisfaisant.

1.6 Exemple

Voici un petit exemple qui a essentiellement pour but de tester les fonctionnalités du compilateur. Il n'a donc rien de réaliste.

```
#open "dimens";;
#open "dfloat";;
#open "printf";;

let calcenerg v m =
   printf "L'energie de masse de la particule est %.3g MeV\n" (m * sqr(c) / MeV );
   let mu = m / sqrt(1.-sqr(v/c)) in
   printf "Son energie cinetique est %.3g MeV\n" ((mu - m) * sqr(c) / MeV);
   printf "Son energie totale est %.3g MeV\n" (mu * sqr(c) / MeV);
;;

let exemples =
   print_string "\nElectron a la vitesse c/2 :\n";
   calcenerg (c/2.) me;
   print_string "\nProton a la vitesse c/2 :\n";
   calcenerg (c/2.) mp;
   print_string "\nNeutron a la vitesse c/2 :\n";
   calcenerg (c/2.) mn
;;

let saisie =
   print_string "\nEntrez la masse de la particule (en kg) : ";
   let m=read_float() * kg in
```

```
      print_string "Entrez sa vitesse (en fraction de c) : ";
      let v=read_float() * c in
         calcenerg v m
;;

exemples;;
flush std_out;;
saisie;;
flush std_out;;
```

Chapitre 2

Algorithmes utilisés

Les algorithmes utilisés pour le contrôle des dimensions sont particulièrement simples.

2.1 Format interne des dimensions

Le type des dimensions est déclaré dans **globals.ml** de la façon suivante :

```
(* Dimensions *)

type dimtyp_desc = DConst of string global | DVar of mutable dlink

and dimtyp = {dim_desc : dimtyp_desc;
              mutable dim_level:  int}

and dlink = Dnolink | Dlinkto of dimtype

and dimtype == (dimtyp * int * int) list;;    (* exposants rationnels *)
```

Les variables sont représentées par des liens, ce qui permet de faire une unification destructive. Une dimension `dimtype` est représentée comme une liste de dimensions élémentaires `dimtyp` accompagnées d'un exposant rationnel non nul. Les variables de dimension apparaissent dans cette liste systématiquement avant les constantes dimensionnelles, ce qui simplifie certaines fonctions.

Les identificateurs de dimensions sont représentés par un enregistrement

```
string global == {qualid : qualified_identifier;
                                    (* Nom de la dimension *)
                  info : string     (* Unité associée, "" si aucune *)
                 }
```

Cette structure est aussi celle utilisée pour le stockage dans l'interface des modules. De plus, elle permet de retrouver facilement l'unité associée à une dimension pour les affichages dans le toplevel.

2.2 Unification

L'unification est réalisée dans **dimen1.ml**

```
let dim_unify dim dim'=
   let dim2=dim_type_repr(mult (-1) 1 dim dim') in
      match dim2 with
        [] -> ()
      | (({dim_desc = DVar (Dnolink as v)},n,m) ::dim3) ->
```

```
         v <- Dlinkto (expo (-m) n dim3)
      | _ ->
         raise Unify
;;
```

La fonction `mult n m dim dim'` calcule $dim^{(n/m)} * dim'$ et `expo n m dim` calcule $dim^{(n/m)}$ (Voir **dimen0.ml**). `dim_type_repr` calcule la forme instanciée d'une dimension, en remplaçant les variables instanciées par leur valeur.

On commence donc par calculer le quotient des deux dimensions à unifier. On a alors trois cas possibles :

- Le quotient est sans dimension : les deux dimensions de départ sont identiques.
- Le quotient contient une variable : on peut le rendre sans dimension en substituant convenablement cette variable, et ainsi unifier les deux dimensions de départ.
- Sinon, on ne peut pas unifier les dimensions.

2.3 Filtrage

Le filtrage est aussi réalisé dans **dimen1.ml**

```
(* Trouve une variable v qui est dans dim' et pas dim
   Lève l'exception Unify s'il n'y a pas de telle variable *)

let rec dim_occur_check dim =
   fun (({ dim_desc = DVar(Dnolink) as v} ,n,m) as t1 :: l) ->
          if occur v dim then
              let (t2,l2)=dim_occur_check dim l
              in (t2,t1::l)
          else
              (t1,l)
    | _ -> raise Unify
      (* Quand on rencontre une constante, il n'y a plus de variable *)
;;

(* Instancie dim pour qu'elle soit égale à dim' *)

let dim_filter dim dim'=
   let dim2=dim_type_repr dim
   and dim2'=dim_type_repr dim' in
   if mult (-1) 1 dim2 dim2'=[] then
      ()
   else
      let ((ty,n,m),dim3)=dim_occur_check dim2' dim2 in
      match ty.dim_desc with
        DVar(v) -> v <- Dlinkto (expo m n (mult (-1) 1 dim3 dim2'))
      | _ -> raise Unify
;;
```

On commence par calculer le quotient des deux dimensions pour voir si elles sont identiques. Sinon, on cherche une variable apparaissant dans dim2 et pas dans dim2' pour pouvoir, en instanciant cette variable, rendre dim2 égal à dim2'. S'il n'y a pas de telle variable, c'est l'échec.

Le filtrage est utilisé pour vérifier la compatibilité de l'interface et de l'implémentation d'un module.

Chapitre 3

Installation et accès aux sources

Le seul fichier à récupérer est **cl7dim.tar.gz**. En décomprimant cette archive, on crée le répertoire **cl7dim** qui correspond au répertoire **src** de la distribution **Caml Light**. Ensuite, il faut indiquer dans le **Makefile**, où trouver une distribution Caml-Light 0.7 compilée. (Pour éviter de transporter trop de fichiers, le système établit des liens vers cette distribution pour les fichiers inchangés). Il ne reste plus alors qu'à lancer

```
make world
```

Remarque : Ne pas utiliser inconsidérement `make clean`, car comme il n'y a pas d'installation dans un répertoire extérieur, cela efface des fichiers nécessaires au fonctionnement du système.

Le code source du compilateur est dans **compiler**, les librairies dans **lib** (seuls les fichiers d* sont de ma fabrication), le toplevel est dans **toplevel**. Le code exécutable est dans **camlcomp**, et les scripts de lancement s'appellent **camlc** et **camllight**. Leur utilisation est la même que pour Caml-Light 0.7. Si le répertoire **cl7dim**, ou celui de la distribution Caml-Light 0.7 n'est pas dans le path, il faut exécuter les programmes en appelant explicitement **camlrun**.

Ces scripts et les fichiers **Makefile** de **cl7dim** et **cl7dim/launch** ont été modifiés pour qu'il ne soit pas nécessaire d'installer Caml dans les répertoires de binaires **/usr/local/bin**... , ce qui nécessite d'être root. Il faudra revenir au fonctionnement initial pour obtenir une distribution plus classique.

Références

[Gou94] Jean Goubault. – Inférence d'unités physiques en ML. *In : Journées francophones des langages applicatifs (JFLA'94).* – L'Épine, Noirmoutier, France, janvier-février 1994. Disponible sur `ftp://theory.doc.ic.ac.uk/imported/GoubaultJ/units.(dvi|ps)`.

[Ken94] Andrew Kennedy. – Dimension Types. *In : European Symposium on Programming 1994 (ESOP'94).* – Springer-Verlag. Disponible sur `http://www.cl.cam.ac.uk:80/users/ajk13/dim.(dvi|ps).Z`.

[WO91] Mitchell Wand et Patrick O'Keefe. – Automatic Dimensional Inference. *In : Computational Logic : in honor of J. Alan Robinson*, éd. par J.-L. Lassez et G. D. Plotkin. pp. 479 – 486. – MIT Press. Disponible sur `ftp://ftp.ccs.neu.edu/pub/people/wand/papers/dimensions.ps`.

Troisième partie

Stage de maîtrise : Implémentation de la géométrie de l'interaction

Sous la direction de M. Ian Mackie
mackie@lix.polytechnique.fr

Chapitre 1

Le langage implémenté

Ce stage consiste à implémenter une extension de PCF [Abr91] avec les listes et le filtrage à l'aide de la géométrie de l'interaction [Gir89]. On a procédé à diverses optimisations de la machine initiale et on a comparé les performances obtenues par les différentes versions de la géométrie de l'interaction et de compilateurs existants pour les langages fonctionnels (on a pris comme exemple Caml-Light, copyright INRIA 1991-1995) et la réduction optimale (Bologna Optimal Higher-order Machine de A.Asperti, C.Giovannetti, C.Laneve et A.Naletto, Dipartimento di Matematica, Bologna).

Le compilateur est implémenté en Objective Caml, et produit du code C à compiler avec `gcc`.

Le langage utilisé, appelé SFL (Small Functional Language), est une extension de PCF [Abr91] avec des opérations supplémentaires sur les entiers et les booléens, les listes et le filtrage. La figure 1.1 en donne une grammaire simplifiée. Les expressions (notées $< expr >$) comprennent les constructions suivantes :

- `fn` $< var >$ `=>` $< expr >$ pour l'abstraction
- $< expr >$ $< expr >$ pour l'application
- `let` $< var >$ `=` $< expr >$ `in` $< expr >$
- $< var >$ référence à une variable
- `(`$< expr >$`)` pour passer outre les priorités

comme constructions de base. On y a ajouté des constantes :

- `[], : :, hd, tl, isnil` pour les listes
- `+, -, * , /, %, iszero, pred, succ, =, <=, <, <>` et $< constantes\ entières >$ pour l'arithmétique
- `tt, ff, and, or, xor, not` comme fonctions logiques
- `cond` et la construction plus élégante `if` $< expr >$ `then` $< expr >$ `else` $< expr >$ pour l'expression conditionnelle
- `Y` pour la récursivité.

Les opérateurs `: :, +, -, *, /, %, =, <=, <, <>, and, or, xor` sont naturellement infixes. Les constantes ci-dessus sont des mots-clés qui ne peuvent être utilisés comme identificateurs de variables.

Pour faciliter l'écriture, on a aussi ajouté le filtrage. Seul le filtrage linéaire est accepté (c'est-à-dire que chaque variable ne doit apparaître qu'une fois). Ceci ressemble beaucoup au filtrage tel qu'il est implémenté dans Caml par exemple. En cas de filtrage non exhaustif, un message d'avertissement est affiché, et une erreur se produit à l'exécution si on rencontre un cas non prévu.

```
< progelem > : := < expr > ; ;
               | let < var > = < expr > ; ;
               | let rec < var > = < expr(var) > ; ;

< prog > : := (< progelem >)*

< expr > : := (< expr >)
            | < expr > < expr >
            | fn < pattern > => < expr >
                | < pattern > => < expr >
                | ...
            | let < var > = < expr > in < expr >
            | let rec < var > = < expr(var) > in < expr >
            | < var >
            | < const >
            | if < expr > then < expr > else < expr >
            | match < expr > with < pattern > => < expr >
                                  | < pattern > => < expr >
                                  | ...
            | < expr > < op > < expr >
            | [< expr > ; ... ; < expr >]
            | < expr > : < type >

< const > : := < constante entière >
            | cond | tt | ff | not | Y | succ
            | pred | iszero | isnil | hd | tl | []

< op > : := + | - | * | / | %
          | < | > | <= | >= | =
          | <> | : : | and | or | xor

< pattern > : := < var > | _
               | < constante entière >
               | < pattern > : : < pattern >
               | [< pattern > ; ... ; < pattern >] | []
               | (< pattern >)

< type > : := int | bool | '< ident >
            | < type > list
            | < type > => < type >
            | (< type >)
```

FIG. 1.1 – *Grammaire du langage utilisé, selon la notation BNF. Je n'ai pas ici tenu compte des priorités pour simplifier.*

On a aussi ajouté :

- `let rec` $< var >$ `=` $< expr(var) >$ `in` $< expr >$ pour la récursivité
- `[`$< expr >$`;`$< expr >$`;...;`$< expr >$`]` pour les listes
- `>`, `>=` pour l'arithmétique.
- $< expr >$ `:` $< type >$ pour pouvoir forcer le type d'une expression. Ceci est surtout utile dans le cas non typable (voir ci-dessous).

Ces dernières formes sont traduites dans les constructions précédentes après le typage.

Un programme complet est une succession de déclarations et d'expressions, où les déclarations sont de la forme :

`let` $< var >$ `=` $< expr >$ `; ;`

`let rec` $< var >$ `=` $< expr(var) >$ `; ;` pour une expression récursive

et les expressions sont de la forme :

$< expr >$ `; ;`

Remarque : la récursivité peut être utilisée aussi bien pour des structures de données que pour des fonctions.

Après l'analyse syntaxique, le système type le programme par un typage analogue à celui de ML. Ce typage s'inspire du fonctionnement de Caml Light, comme d'ailleurs l'affichage des messages d'erreur. L'option `-t` (pour le compilateur) ou `#notyping` (pour le toplevel) permet de faire passer des termes non typables : les erreurs de type deviennent de simples messages d'avertissement, et le type des expressions non typables est considéré comme quelconque (`'V`). L'utilisateur peut fixer lui-même le type des expressions par la construction e `:` t. Dans ce cas, si l'expression e est typable et de type t' compatible avec t, le type résultant est l'unifié de t et t', sinon le type résultant est t, et aucun message n'est affiché. Mais alors, attention aux comportements étranges ! Tout peut arriver puisque le contrôle du programme n'est que très partiel.

Le compilateur tente ensuite d'optimiser l'expression entrée en éliminant les radicaux existants de la façon suivante : les expressions `(fn` x `=>` e_2`)` e_1 et `let` x `=` e_1 `in` e_2 deviennent :

- si x n'apparaît pas dans e_2, e_2 seulement ;
- s'il apparaît une fois, on remplace x par son expression dans e_2 ;
- s'il apparaît plusieurs fois, soit e_1 est une variable et on renomme simplement x, sinon on garde la construction `let` x `=` e_1 `in` e_2.

Les mentions `rec` inutiles sont supprimées. L'expression optimisée est affichée par le compilateur après le type.

Ensuite, la phase de génération de code peut commencer. Celle-ci dépend de la machine choisie, et est décrite dans la partie suivante.

A l'exécution, les différentes expressions sont calculées successivement et leurs résultats sont affichés. On peut obtenir une trace latex avec l'option `-l` (compilateur) ou `#latex` (toplevel). Dans le toplevel, la commande `#tex` permet d'effectuer en une seule opération compilation et visualisation de la trace.

Par défaut, le programme compte chaque type d'opération effectuée et la quantité de mémoire utilisée et affiche un bilan après chaque calcul d'expression. On peut désactiver ceci avec l'option `-c` (compilateur) ou `#nocount` (toplevel). Enfin, le programme chronomètre l'exécution de chaque expression.

Chapitre 2

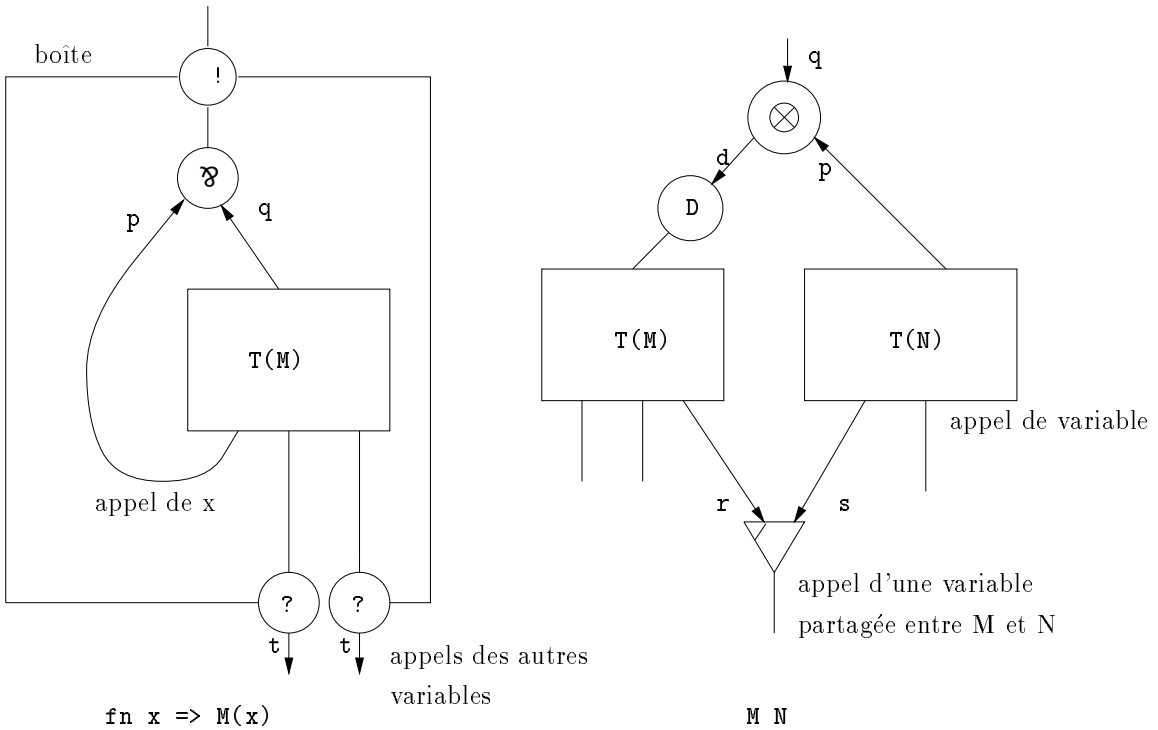
Les différentes machines utilisées

2.1 La géométrie de l'interaction (GOI)

Cette machine s'appuie sur celle décrite dans la thèse de M. Mackie [Mac94a]. Je me contenterai ici de donner un résumé rapide du codage effectué, sans le justifier.

La géométrie de l'interaction est une sémantique à mi-chemin entre la sémantique dénotationelle et opérationnelle. Elle est dénotationelle puisqu'elle est indépendante de la syntaxe (par exemple, de la notion de substitution), et elle est opérationnelle car les règles données indiquent comment le calcul doit être effectué.

Chaque terme est traduit par un graphe selon les schémas suivants :

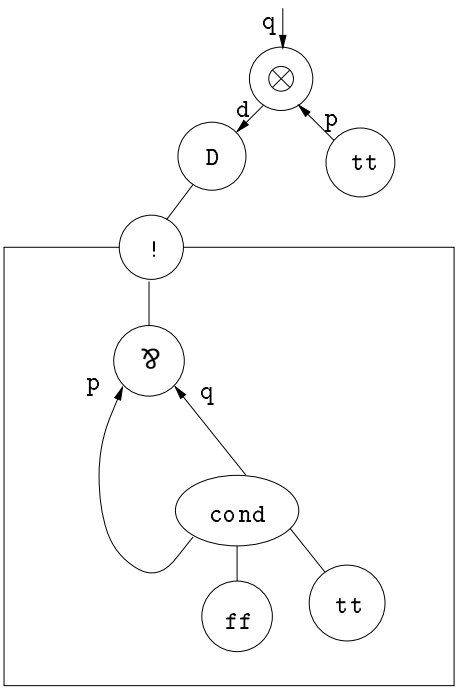


Codage de l'abstraction et de l'application

Seuls sont donnés ici les schémas concernant le λ-calcul pur ; les constantes, listes et fonctions prédéfinies sont représentées par des nœuds qui seront donnés plus loin.

La sémantique du programme consiste en un ensemble de chemins dans ce graphe, certains chemins

étant interdits par la sémantique et d'autres autorisés. On peut commencer le calcul des chemins n'importe où, mais on s'intéressera ici uniquement aux résultats de types simples, qui sont obtenus par les chemins qui partent de la racine et y reviennent. Il existe un seul chemin de ce type car le comportement à chaque nœud est entièrement déterminé par l'état de la machine.



Exemple de codage `(fn x => if x then ff else tt) tt`

Cet état se compose des structures de données suivantes :

- Un arbre binaire avec pointeur sur le père (`prev`) et sur les fils (`left`, `right`), qui permet de stocker l'environnement. Il est repéré par deux pointeurs, un à sa racine (`context`) et un qui se déplace le long de sa branche droite (`ep`). A chaque nœud de cet arbre se situe une pile (implémentée par une liste chaînée) qui contient l'état des contractions (une contraction est un nœud représenté par un triangle, qui apparaît dans le schéma du codage de l'application, et qui permet l'utilisation répétée des variables).

- Une pile pour stocker les valeurs de types simples (entiers et booléens) pointée par `vstack`. Cette pile sera notée v.

- Une pile multiplicative M, qui est stockée dans un simple registre 32 bits `R0`. En effet, cette pile sert à stocker des informations d'un bit 0 ou 1, et on montre que le nombre maximal de valeurs à stocker est borné par la taille maximale du type d'un sous-terme. 32 bits suffisent donc largement.

- Une pile d pour se repérer dans les déplacements dans les listes, pointée par `dstack`.

L'exécution du programme consiste donc en un parcours du graphe, qui part de la racine, exécute à chaque nœud un morceau de code C qui modifie l'état puis passe au nœud suivant. Les opérations effectuées sont réversibles, c'est-à-dire que quand on passe sur une arête dans le sens de la flèche on effectue l'opération indiquée, et que quand on passe dans le sens contraire, on effectue l'opération inverse (notée avec une *). Seules les opérations concernant la pile de valeurs ne sont pas réversibles (et sont exécutées seulement sur le chemin de retour).

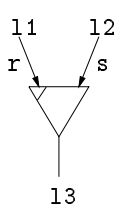
Au retour à la racine, la pile de valeurs contiendra un unique élément qui sera le résultat de l'évaluation du programme.

L'effet des instructions élémentaires sur l'état est le suivant :

Opération	Etat initial		Etat final	Op. inverse
Opérations multiplicatives				
p	M	$\Longleftrightarrow$	p :M	p*
q	M	$\Longleftrightarrow$	q :M	q*
Opérations sur les valeurs				
c	v	$\longrightarrow$	$c : v$	
`succ`	$a : v$	$\longrightarrow$	$(a+1) : v$	
`iszero`	$a : v$	$\longrightarrow$	`tt` :v si $a = 0$	
			`ff` :v si $a \neq 0$	
`+`	$a : b : v$	$\longrightarrow$	$(a+b) : v$	
`not`	`tt` :v	$\longrightarrow$	`ff` :v	
	`ff` :v	$\longrightarrow$	`tt` :v	
Les autres opérations sont analogues.				
Opérations sur l'arbre exponentiel				
Ces opérations concernent le sous-arbre de racine `ep`.				
r	$< e_1, e_2 >$	$\Longleftrightarrow$	$< L : e_1, e_2 >$	r*
s	$< e_1, e_2 >$	$\Longleftrightarrow$	$< R : e_1, e_2 >$	s*
t	$< e_1, < e_2, e_3 >>$	$\Longleftrightarrow$	$<< e_1, e_2 >, e_3 >$	t*
d	e	$\Longleftrightarrow$	$< \Box, e >$	d*
Opérations sur les listes				
h	d	$\Longleftrightarrow$	h :d	h*
l	d	$\Longleftrightarrow$	l :d	l*
i	d	$\Longleftrightarrow$	i :d	i*

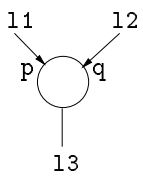
Chaque arête du graphe est représentée par un couple d'étiquettes (`l_in`, `l_out`) et les différents nœuds sont codés comme suit :

– contraction



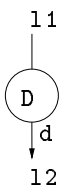

```
l1_in: r
       aller à l3_out ;
l2_in: s
       aller à l3_out ;
l3_in: dépiler le sommet de ep->left ;
       si c'est L,
         aller à l1_out ;
       sinon
         aller à l2_out ;
```

– nœuds multiplicatifs. Il y a deux sortes de nœuds multiplicatifs: tenseur $\otimes$ et par $\parr$, qui sont codés de la même façon.



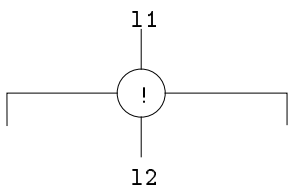

```
l1_in: p
       aller à l3_out;
l2_in: q
       aller à l3_out;
l3_in: si p est au sommet de M,
          p*
          aller à l1_out;
       sinon
          q*
          aller à l2_out;
```

– déréliction (D)



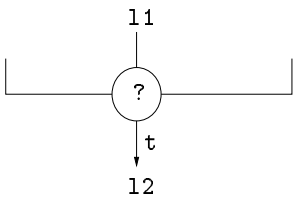

```
l1_in: d
       aller à l2_out;
l2_in: d*
       aller à l1_out;
```

– porte principale (!)



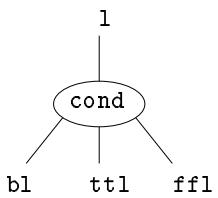

```
l1_in: ep = ep->right;
       aller à l2_out;
l2_in: ep = ep->prev;
       aller à l1_out;
```

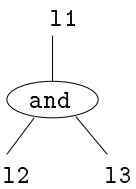
– portes auxiliaires (?t)




```
l1_in: ep = ep->prev;
       t
       aller à l2_out;
l2_in: t*
       ep = ep->right;
       aller à l1_out;
```

– condition, `and`, `or`

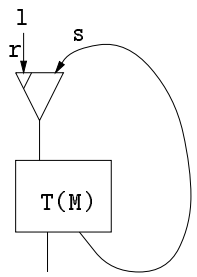




`l_in : aller à bl_out ;`
`bl_in : dépiler le sommet de` v `;`
`si c'est tt,`
`aller à ttl_out ;`
`sinon`
`aller à ffl_out ;`
`ttl_in :`
`ffl_in : aller à l_out ;`
	`l1_in : aller à l2_out ;`
	`l2_in : si le sommet de` v `est tt,`
	`le dépiler ;`
	`aller à l3_out ;`
	`sinon`
	`aller à l1_out ;`
	`l3_in : aller à l1_out ;`

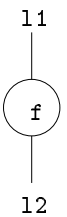
`or` se code comme `and` sauf que le test est "`si le sommet de` v `est ff`".

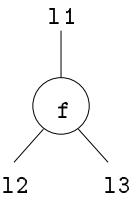
– récursivité (Y) : on se sert ici de nœuds déjà existants. Il est inutile d'en introduire de nouveaux.



`Y (fn x =>M)`

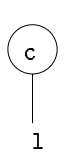
– fonctions arithmétiques : les opérations à un argument (`succ`, `pred`, `iszero`, `not`) sont codées suivant le schéma de gauche, alors que les opérations à 2 arguments (`+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<>`, `<=`, `<`, `=`, `xor`) utilisent celui de droite.





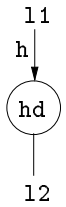
`l1_in : aller à l2_out ;`
`l2_in : f`
`aller à l1_out ;`
	`l1_in : aller à l2_out ;`
	`l2_in : aller à l3_out ;`
	`l3_in : f`
	`aller à l1_out ;`

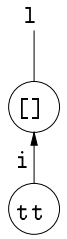
– constantes : les constantes entières, `tt` et `ff` sont codés suivant le même schéma.

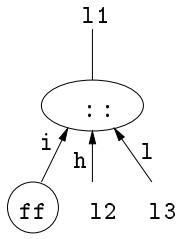



```
l_in : c
       aller à l_out ;
```

– listes : les fonctions `hd`, `tl` et `isnil` sont codées suivant le même principe, avec les opérations h, l et i respectivement. C'est pourquoi seul le code de `hd` est donné.







`l1_in :`
`  h`
`  aller à l2_out ;`
`l2_in :`
`  h*`
`  aller à l1_out ;`
	`l_in :`
	`  si le sommet de` d `est i,`
	`  tt`
	`  aller à l_out ;`
	`  sinon`
	`  erreur`
		`l1_in :`
		`  suivant le sommet de` d
		`  h : h*`
		`  aller à l2_out ;`
		`  l : l*`
		`  aller à l3_out ;`
		`  i : ff`
		`  aller à l1_out ;`
		`l2_in :`
		`  h`
		`  aller à l1_out ;`
		`l3_in :`
		`  l`
		`  aller à l1_out ;`

L'affichage des listes est effectué en exécutant une boucle qui teste d'abord si la liste est vide, puis si elle ne l'est pas, calcule et affiche sa tête, puis recommence avec la queue de la liste. Le code de cette partie est écrit directement en C.

On a réalisé une deuxième version de cette machine, qui comprend plusieurs optimisations:

– suppression des `goto` autant que possible, pour faciliter l'optimisation du code par `gcc`. Ceci fait perdre quelque peu la structure en nœuds du programme qui était très visible sur la version précédente (un morceau de code C pour chaque nœud du graphe), mais la compréhension du code C obtenu est plutôt plus facile car on regroupe les parties qui seront exécutées en séquence.

– amélioration des accès aux variables: les contractions sont regroupées en une seule grande contraction, dans laquelle à l'aller on stocke l'adresse où se brancher, et au retour on se branche à cette adresse. D'autre part, le groupe déréliction-sortie de boîte est optimisé en !*. Enfin, les successions de sorties de boîtes sont regroupées en une seule opération, qui prend approximativement le même temps qu'une seule sortie de boîte (tant que le nombre de sorties est assez faible, ce qui est le cas en général).

– diminution de la taille de la structure de données utilisée, par suppression des feuilles de l'arbre binaire. Ceci a aussi pour effet d'accélérer le fonctionnement, car la réservation et la libération de mémoire prennent une partie importante du temps.

– optimisation du traitement des listes : les opérations ne sont pas effectuées sur le chemin du retour.

On verra qu'au total ces optimisations permettent de gagner un facteur 2 ou 3 sur le temps d'exécution de beaucoup de programmes, d'autant plus quand il y a beaucoup de boîtes imbriquées. Dans ce cas, la part la plus importante du gain vient de la deuxième optimisation.

2.2 Une optimisation : la pile de questions

Cette nouvelle machine est décrite dans [Mac94a] et dans [Mac95].

Cette optimisation de la machine précédente consiste à retourner immédiatement au nœud appelant quand on arrive à une valeur de type de base. Ainsi, chaque nœud qui cherche à obtenir une valeur de base pose une question, c'est-à-dire qu'il sauvegarde sur la pile de questions l'environnement et son adresse actuelle. Quand le programme rencontre la valeur correspondante, il restaure l'environnement et retourne à l'endroit où la question a été posée.

Ainsi, la longueur du chemin est divisée par deux (exactement pour le λ-calcul pur car on ne rencontrera qu'une valeur de type de base au milieu du calcul ; un peu moins dans les autres cas, car on s'arrête sur le chemin de retour à chaque question posée). La contrepartie est un plus grand besoin de mémoire et le temps passé aux copies d'environnements.

2.3 La machine de Krivine

Cette optimisation est proposée dans [DR94].

Cette machine peut-être vue comme une généralisation de la machine à pile de questions : ce n'est plus seulement pour les valeurs de type simple qu'on pose les questions, mais pour toutes les valeurs. Cependant, ceci introduit une différence de conception assez importante, dans la mesure où il n'y a jamais de retour en arrière. Les directions de parcours des nœuds restent toujours les mêmes, et les données multiplicatives qui étaient nécessaires pour les machines précédentes ne le sont plus ici. L'accès aux variables est maintenant beaucoup plus simple : il se fait en une seule étape, par restauration globale de l'environnement et saut à l'adresse voulue. Cependant, cette opération peut être longue.

Remarque : Dans [DR94], le retour se fait au niveau de la déréliction quand on fait appel à une variable. Il faut alors retraverser le tenseur $\otimes$ pour aller chercher le paramètre voulu, et cela nécessite de conserver les données multiplicatives. Ici, on va directement à l'adresse du paramètre cherché, ce qui simplifie le processus.

On sépare l'arbre binaire décrit dans la section 1 en deux parties : de la racine jusqu'à `ep` exclu on a l'environnement, alors que le sous-arbre de racine `ep` représente la pile. Ces deux structures sont alors codées par des listes simplement chaînées. L'effet de chaque nœud peut alors être décrit par les tableaux suivants (les variables sont ici désignées par un numéro qui correspond au nombre de λ à remonter pour trouver leur déclaration).

Adresse	Env.	Pile	$\longrightarrow$	Adr.	Env.	Pile
M N	e	s	$\longrightarrow$	M	e	(N,e) :s
λM	e	u :s	$\longrightarrow$	M	u :e	s
1	(N,e') :e	s	$\longrightarrow$	N	e'	s
n+1	(N,e') :e	s	$\longrightarrow$	n	e	s

Adresse	Env.	Pile	Valeurs	$\longrightarrow$	Adr.	Env.	Pile	Valeurs
c	e	(N, e') :s	v	$\longrightarrow$	N	e'	s	c :v
`cond` be tte ffe	e	s		$\longrightarrow$	be	e	(`c2` tte ffe, e) :s	
`c2` tte ffe	e	s	`tt` :v	$\longrightarrow$	tte	e	s	v
`c2` tte ffe	e	s	`ff` :v	$\longrightarrow$	ffe	e	s	v
M + N	e	s		$\longrightarrow$	M	e	(+ N, e) :s	
+ N	e	s		$\longrightarrow$	N	e	(+, NIL) :s	
+	e	(N, e') :s	c_1 :c_2 :v	$\longrightarrow$	N	e'	s	$(c_1 + c_2)$:v

Adresse	Env.	Pile	Valeurs	Listes	$\longrightarrow$	Adr.	Env.	Pile	Valeurs	Listes
M : :N	e	(P, e') :s	v	i :d	$\longrightarrow$	P	e'	s	`ff` :v	d
M : :N	e	s	v	h :d	$\longrightarrow$	M	e	s	v	d
M : :N	e	s	v	l :d	$\longrightarrow$	N	e	s	v	d
`[]`	e	(P, e') :s	v	i :d	$\longrightarrow$	P	e'	s	`tt` :v	d
`hd` M	e	s	v	d	$\longrightarrow$	M	e	s	v	h :d

Les autres constantes sont codées de façon analogue. Dans la colonne adresse, j'ai en fait indiqué le terme de λ-calcul qui est évalué dans le programme à l'adresse en question. Le ":" dénote la concaténation d'éléments dans une liste.

En mettant un environnement vide NIL dans la pile quand on évalue + N, on évite une sauvegarde inutile (car on n'a pas besoin de l'environnement pour évaluer +).

On a implémenté trois machines de ce type : la première effectue des copies complètes des environnements ; la seconde ne copie dans les environnements que la partie concernant les variables effectivement référencées. La dernière partage les environnements avec des pointeurs, et utilise un mécanisme de GC pour libérer sa mémoire (on tient simplement à jour le nombre de pointeurs sur chaque cellule mémoire, et quand ce nombre s'annule, on libère la cellule en question).

2.4 L'appel par valeur

L'appel par valeur est une modification de la machine de Krivine, qui, elle, implémentait l'appel par nom comme la GOI. Le tableau précédent doit être remplacé par celui-ci :

Adresse	Env.	Pile	$\longrightarrow$	Adr.	Env.	Pile
M N	e	s	$\longrightarrow$	M	e	L(N,e) :s
λM	e	L(N, e') :s	$\longrightarrow$	N	e'	(M, e) :s
	e	(N, e') :s	$\longrightarrow$	N	(λM, e) :e'	s
1	(N, e') :e	s	$\longrightarrow$	N	e'	s
1	v(c) :e	(N, e') :s	$\longrightarrow$	N	v(c) :e'	s
n+1	(N, e') :e	s	$\longrightarrow$	n	e	s
c	e	(N, e') :s	$\longrightarrow$	N	v(c) :e'	s
`cond` be tte ffe	e	s	$\longrightarrow$	be	e	(`c2` tte ffe,e) :s
`c2` tte ffe	v(`tt`) :e	s	$\longrightarrow$	tte	e	s
	v(`ff`) :e	s	$\longrightarrow$	ffe	e	s
M + N	e	s	$\longrightarrow$	M	e	(+ N,e) :s
+ N	v(c) :e	s	$\longrightarrow$	N	e	(+, NIL) :v(c) :s
+	v(c_1) :e	v(c_2) :(N,e') :s	$\longrightarrow$	N	v($c_1 + c_2$) :e'	s
M : :N	e	h :s	$\longrightarrow$	M	e	s
	e	l :s	$\longrightarrow$	N	e	s
	e	i :(P, e') :s	$\longrightarrow$	P	v(`ff`) :e'	s
	e	(P, e') :s	$\longrightarrow$	P	(M : :N, e) :e'	s
`[]`	e	i :(N, e') :s	$\longrightarrow$	N	v(`tt`) :e'	s
	e	(N, e') :s	$\longrightarrow$	N	(`[]`,e) :e'	s
`hd` M	e	s	$\longrightarrow$	M	e	h :s

La lettre L représente un drapeau qui indique que la valeur est à évaluer. v(x) représente la valeur de type simple x.

On retrouve ici les trois versions, avec copies complètes, partielles et avec GC comme pour la machine de Krivine.

2.5 L'appel par nécessité

Le système est encore analogue mais cette fois le tableau est le suivant (Par manque de place, les transitions sont ici disposées sous la forme d'un trait horizontal, avec au-dessus l'état initial et en-dessous l'état final) :

Adresse	Env.	Pile	Affectations
M N	e	s	
M	e	(N,e) :s	
λM	e	UPD(a_1) :...:UPD(a_n) :u :s	
M	u :e	s	$a_1 := ... := a_n :=$(λM,e)
1	(λM,e') :e	s	
λM	e'	s	
1	v(c) :e	UPD(a_1) :...:UPD(a_n) :(N,e') :s	
N	e'	s	$a_1 := ... := a_n :=$v(c)
1	a=(N,e') :e	s	
N	e'	UPD(a) :s	
n+1	(N,e') :e	s	
n	e	s	
c	e	UPD(a_1) :...:UPD(a_n) :(N,e') :s	
N	e'	s	$a_1 := ... := a_n :=$v(c)
`cond` be tte ffe	e	s	
be	e	UPD(a) :(`cond2` tte ffe,e) :a=v(`ff`) :s	
`cond2` tte ffe	e	v(`tt`) :s	
tte	e	s	
`cond2` tte ffe	e	v(`ff`) :s	
ffe	e	s	
M + N	e	UPD(a) :s	
M	e	UPD(a) : (+ N,e) :UPD(a) :s	
+ N	e	s	
N	e	UPD(a) :(+,e) :a=v(0) :s	
+	e	v(c_2) :UPD(a_1) :...:UPD(a_n) :(N,e') :s	
N	e'	s	a_1=v(c_1) ; $a_1 := ...a_n :=$v($c_1 + c_2$)
M : :N	e	UPD(a) :s	
M : :N	e	s	a :=(M : :N,e)
M : :N	e	h :s	
M	e	s	
M : :N	e	l :s	
N	e	s	
M : :N	e	i :UPD(a_1) :...:UPD(a_n) :(P,e') :s	
P	e'	s	$a_1 := ... := a_n :=$v(`ff`)
`[]`	e	UPD(a) :s	
`[]`	e	s	a :=(`[]`,e)

`[]`	e	i :UPD(a_1) :... :UPD(a_n) :(N,e') :s	
N	e'	s	$a_1 := ... := a_n$:=v(`tt`)
`hd` M	e	s	
M	e	h :s	

La valeur UPD(a) indique que la valeur à l'adresse a devra être mise à jour quand on aura obtenu un résultat. Ainsi, dès qu'un résultat est obtenu, il est enregistré et n'est plus recalculé. UPD(a_1) :... :UPD(a_n) représente un nombre quelconque de valeurs UPD (éventuellement zéro). v(x) représente la valeur de type simple x. La notation a=x signifie que la valeur x se situe à l'adresse a, alors que la notation a :=x signifie qu'on affecte la valeur x à l'adresse a.

La première ligne du tableau concernant l'adresse "1" est une optimisation : si la valeur est déjà en forme normale en tête, on ne peut poursuivre son évaluation, donc il est inutile de rajouter une valeur UPD dans la pile. Dans le compilateur, cette optimisation est implémentée sous une forme légèrement différente : si la valeur a déjà été évaluée, on ne remet pas UPD sur la pile, et si on applique une fonction a un paramètre qui est déjà une valeur dans le code source, on ne met pas UPD sur la pile.

De plus, quand une variable n'est utilisée qu'une fois, il est inutile de mettre UPD sur la pile. Ceci se détecte facilement ici, car pour le GC, on stocke le nombre de fois que chaque cellule est copiée, donc si ce nombre vaut 1, on ne met pas UPD. Ceci permet de gagner une quantité importante de mémoire.

Cette fois, seule la version avec partage d'environnements et GC a un sens.

Chapitre 3

Evaluation des performances de ces machines

Les tests décrits ci-dessous ont été réalisés sur Sparc 20.

3.1 λ-calcul pur

Les exemples de λ-calcul pur sont extraits de [Asp95] (sauf le dernier). Ils consistent en calculs arithmétiques avec les entiers de Church. Voici le programme utilisé :

```
let I = fn x => x;;

let zero = fn f => fn x => x;;
let one  = fn f => fn x => f x;;
let two  = fn f => fn x => f (f x);;
(* etc... *)

let Succ = fn n => fn x => fn y => (x (n x y));;
let Mult = fn n => fn m => fn x => (n (m x));;

let Pair = fn x => fn y => fn z => (z x y);;
let Fst  = fn x => fn y => x;;
let Snd  = fn x => fn y => y;;

let Nextfact = fn p => let n1 = (p Fst) in
               let n2 = (Succ (p Snd)) in
                     (Pair (Mult n1 n2) n2);;

let Fact = fn n => (n Nextfact (Pair one zero) Fst);;

let Add = fn m => fn n => fn x => fn y => (m x (n x y));;

let Nextfibo = fn p => let n1 = (p Fst) in
    let n2 = (p Snd) in (Pair (Add n1 n2) n1);;

let Fibo = fn n => (n Nextfibo (Pair zero one) Fst);;

let g = fn n => n two I tt;;
```

Les tableaux suivants donnent les temps d'exécution en ms dans différents exemples. La précision des mesures de temps est de 16 ms environ. Les petits temps ne sont donc pas très significatifs. Certains temps sont vraiment très courts. On a alors répété 10 ou 100 fois l'évaluation pour obtenir une meilleure précision. L'indication « Trop long » signifie que le temps de calcul avec comptage a dépassé 2000 s (soit environ 33 min).

D'autres tableaux indiquent l'occupation mémoire des différentes machines. Pour optimiser les allocations mémoire, les structures de données ne sont pas réservées individuellement mais par blocs de 100. La taille indiquée correspond à la taille t utilisée dans les blocs, et non à la taille totale des blocs. La taille des blocs est bornée par $t * 1,01 + cte$. Le 1% supplémentaire correspond à la cellule utilisée pour le chaînage entre les blocs mémoire.

On a aussi indiqué le nombre de β-réductions effectuées. Pour l'appel par valeur, une β-réduction correspond à une instruction d et pour l'appel par nécessité et la machine de Krivine, à une instruction d et une !. Le nombre de β-réductions est le même pour toutes les machines à appel par nom, donc on n'a pas répété les valeurs, et elles se trouvent dans la colonne "Nom". Il se trouve que sur les exemples présentés tous les paramètres sont évalués, donc le nombre de β-réductions est le même pour les machines à appel par valeur et par nécessité.

Les machines GOI et questions-réponses parcourent les radicaux non seulement pour effectuer les β-réductions proprement dites, mais aussi pour accéder aux variables, ce qui conduit à des valeurs beaucoup plus grandes. Pour la GOI, un parcours de radical correspond à 2 instructions q et 2 q* ; pour la machine à questions-réponses, à 1 instruction q et 1 q* ; le nombre de radicaux parcourus par ces deux machines est noté dans la colonne "Parcours de radicaux".

Enfin, on a indiqué une comparaison entre les deux versions de la géométrie de l'interaction, avec les nombres de dérélictions (D), de contractions (r et s) et de sorties de boîtes (t) (Dans la version optimisée, la sortie de plusieurs boîtes en une seule étape compte pour une sortie).

3.1.1 Fact

Temps (ms)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`Fact five I 1`	80	151	42	0
`Fact six I 1`	533	983	267	20
`Fact seven I 1`	4050	7483	1983	30
`Fact nine I 1`				50
`Fact ten I 1`				70
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`Fact five I 1`	33083	8,0	3,8	2,3
`Fact six I 1`	Non testé	46,3	21,3	10,8
`Fact seven I 1`		326	146	70,2
`Fact nine I 1`		24833	10383	4817
`Fact ten I 1`			103667	47850
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml-Light
`Fact five I 1`	13,,8	2,8	1,8	0,8
`Fact six I 1`	66,1	14,2	9,0	3,9
`Fact seven I 1`	480	90	57,7	22,1
`Fact nine I 1`	43933	6333	3967	1500
`Fact ten I 1`			39067	16350

Occupation mémoire (octets)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`Fact five I 1`	604	1 404	628	
`Fact six I 1`	756	1 716	780	
`Fact seven I 1`	932	2 068	956	
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`Fact five I 1`	11 603 392	1 476	1 408	912
`Fact six I 1`	Non testé	2 028	1 840	1 056
`Fact seven I 1`		2 676	2 336	1 200
`Fact nine I 1`		4 260	3 520	1 696
`Fact ten I 1`			4 208	2 032
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml-Light
`Fact five I 1`	2 980	1 280	464	
`Fact six I 1`	3 820	2 496	512	
`Fact seven I 1`	6 120	4 528	624	
`Fact nine I 1`	15 920	12 304	928	
`Fact ten I 1`			1 104	

	GOI : Parcours	β-réductions		
Expression	de radicaux	Nom	Valeur, Nécessité	Réd. opt.
`Fact five I 1`	20 620	1 586	540	84
`Fact six I 1`	131 050	8 795	2 714	100
`Fact seven I 1`	980 680	59 204	17 848	117
`Fact nine I 1`	80 562 340	4 091 222	1 227 476	154
`Fact ten I 1`	Trop long	40 379 231	12 113 890	174

	Dérélictions		Contractions	
Expression	GOI	GOI non-opt	GOI	GOI non-opt
`Fact five I 1`	58 400	89 256	33 036	51 492
`Fact six I 1`	373 368	571 796	214 536	339 888
`Fact seven I 1`	2 809 936	4 310 176	1 634 436	2 756 628

	Sorties de boîtes	
Expression	GOI	GOI non-opt
`Fact five I 1`	23 388	54 884
`Fact six I 1`	152 552	354 584
`Fact seven I 1`	1 166 356	2 690 284

A l'exception de la réduction optimale dont le nombre de β-réductions est quadratique (le nombre d'interactions augmentant cependant plus vite sans être exponentiel ; voir [Asp95]), toutes les machines ont une complexité exponentielle. Si elles ne varient pas linéairement les unes par rapport aux autres, les rapports en temps d'exécution croissent lentement mais sont toujours grands (sauf pour la machine de Krivine à copies complètes qui explose dès le début) : par rapport à Caml-Light, la GOI est 100 à 200 fois plus lente, l'appel par valeur à copies complètes 16 à 30 fois, à copies partielles 3 à 4 fois, avec GC 2 à 3 fois, la machine de Krivine à copies partielles 10 à 16 fois, avec GC 4 à 6 fois, et l'appel par nécessité environ 3 fois.

Les machines à copies complètes sont handicapées par leur mécanisme de gestion de la mémoire, en particulier la machine de Krivine. Ceci se ressent aussi bien au niveau du temps d'exécution que de l'occupation mémoire. Les copies partielles et encore plus le GC résolvent ce problème.

Les autres machines à appel par nom sont un peu plus performantes. La machine GOI de base ne sature pratiquement jamais la mémoire car elle en nécessite très peu (quelques kilo-octets au maximum), mais ses temps de calcul deviennent vite prohibitifs. C'est pourquoi j'ai abandonné l'exemple `Fact nine I 1`. La version optimisée de la GOI est à peu près 3 fois plus rapide que la version non

optimisée, et la machine à questions-réponses est encore 2 fois plus rapide. Ceci est logique, car dans le cas du λ-calcul pur, on rencontre à chaque fois une valeur de type simple à la moitié du calcul et ensuite la machine GOI suit tout le chemin déjà parcouru en sens inverse avant de donner le résultat alors que la machine à questions réponses donne aussitôt le résultat. Il n'y a de sauvegarde d'environnement que celle de l'environnement vide initial. Ceci explique la faiblesse de la consommation mémoire: seulement 24 octets de plus que la GOI.

Le tableau de comparaison entre la GOI optimisée ou non montre clairement le progrès apporté par l'optimisation des accès aux variables: le nombre de dérélictions est réduit d'un facteur 1,5, le nombre de contractions de 1,5 à 1,7, et le nombre de sorties de boîtes d'un facteur 2,3. Les résultats sont analogues pour `Fibo` (excepté que le facteur de réduction du nombre de sorties de boîtes est plus faible, 2 environ), et pour `g`.

3.1.2 Fibo

Temps (ms)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`Fibo seven I 1`	27	47	13	30
`Fibo ten I 1`	133	253	67	30
`Fibo (Add three ten) I 1`	1333	2300	667	100
`Fibo (Add six ten) I 1`	6417	11317	3183	400
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`Fibo seven I 1`	270	2,5	1,5	1,2
`Fibo ten I 1`	6367	13,0	7,0	3,7
`Fibo (Add three ten) I 1`	Non testé	78	34,3	11,8
`Fibo (Add six ten) I 1`	Non testé	390	131	47
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml-Light
`Fibo seven I 1`	9,58	2,0	1,0	0,6
`Fibo ten I 1`	49	8,7	2,7	1,2
`Fibo (Add three ten) I 1`	258	37,2	9,3	3,2
`Fibo (Add six ten) I 1`	1258	155	37	14,2

Occupation mémoire (octets)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`Fibo seven I 1`	828	1 772	852	
`Fibo ten I 1`	1 116	2 404	1 140	
`Fibo (Add three ten) I 1`	1 452	3 132	1 476	
`Fibo (Add six ten) I 1`	1 740	3 756	1 764	
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`Fibo seven I 1`	113 904	924	736	1 120
`Fibo ten I 1`	916 720	1 464	976	1 552
`Fibo (Add three ten) I 1`	Non testé	2 460	1 312	1 984
`Fibo (Add six ten) I 1`	Non testé	3 360	1 552	2 416
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml-Light
`Fibo seven I 1`	8 840	2 528	448	
`Fibo ten I 1`	37 320	10 400	544	
`Fibo (Add three ten) I 1`	158 000	43 744	688	
`Fibo (Add six ten) I 1`	669 040	184 992	816	

Expression	GOI : Parcours de radicaux	β-réductions Nom	Valeur, Nécessité	Réd. opt.
`Fibo seven I 1`	5 806	704	232	106
`Fibo ten I 1`	29 440	3 024	747	181
`Fibo (Add three ten) I 1`	323 368	12 866	2 828	398
`Fibo (Add six ten) I 1`	1 525 678	54 530	11 511	1 185

Cet exemple est particulièrement favorable à Caml-Light et aux machines à GC qui sont ici les machines les plus performantes. On voit clairement sur cet exemple la croissance exponentielle de l'occupation mémoire de la machine de Krivine à copies complètes, avant l'explosion. (On ne pouvait le voir sur l'exemple précédent car la saturation intervenait trop tôt).

Ici, même la réduction optimale a une complexité exponentielle. La non-linéarité de la GOI et de ses dérivés par rapport à Caml-Light est plus marquée ici : la GOI est environ 45 à 450 fois plus lente que Caml-Light, l'appel par valeur avec GC 2 à 3 fois et l'appel par nécessité 2 à 4 fois environ.

3.1.3 g

Temps (ms)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`g ten`	53	111	26	10
`g (Add three ten)`	1067	1867	533	20
`g (Add six ten)`	8583	15017	4283	20
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`g ten`	456	10,7	9,2	7,7
`g (Add three ten)`	11650	113	85	58,7
`g (Add six ten)`	115783	900	693	533
`g (Add ten ten)`			11550	7950
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml-Light
`g ten`	17,16	8,8	6,7	3,5
`g (Add three ten)`	136	70	54	25,8
`g (Add six ten)`	1085	553	426	210,4
`g (Add ten ten)`			7067	

Occupation mémoire (octets)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`g ten`	172	596	196	
`g (Add three ten)`	236	812	260	
`g (Add six ten)`	260	932	284	
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`g ten`	2 000	516	400	464
`g (Add three ten)`	6 736	1 020	592	640
`g (Add six ten)`	8 272	1 308	688	736
`g (Add ten ten)`			816	864
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml-Light
`g ten`	1 260	944	352	
`g (Add three ten)`	1 980	1 520	448	
`g (Add six ten)`	2 880	2 240	544	
`g (Add ten ten)`			672	

Expression	GOI : Parcours de radicaux	β-réductions Nom	Valeur, Nécessité	Réd. opt.
`g ten`	6 146	3 073	2 060	34
`g (Add three ten)`	262 158	24 597	16 405	49
`g (Add six ten)`	2 097 278	196 741	131 096	58

Cet exemple est très favorable à la réduction optimale, qui est linéaire. La complexité de toutes les autres machines croît exponentiellement car aucune ne sait profiter au mieux des partages de radicaux.

3.1.4 I

Temps (ms)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`I I ... I I 3 (12 I)`	19,7	38,17	9,8	0
`I I ... I I 3 (18 I)`	1267	2283	633	0
`I I ... I I 3 (22 I)`	20133	40250	10050	0
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`I I ... I I 3 (12 I)`	0,17	0,04	0,04	0,21
`I I ... I I 3 (18 I)`	0,18	0,05	0,05	0,25
`I I ... I I 3 (22 I)`	0,19	0,06	0,06	0,26
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml-Light
`I I ... I I 3 (12 I)`	0,18	0,22	0,22	0,04
`I I ... I I 3 (18 I)`	0,20	0,24	0,24	0,05
`I I ... I I 3 (22 I)`	0,21	0,25	0,25	0,06

Occupation mémoire (octets)	`II...II3(nI)`
GOI	n*16+28
GOI non-opt	n*32+28
Question	n*16+52
Krivine copies complètes	(n+2)*16
Valeur copies complètes	(n+2)*20
Krivine copies partielles	(n+1)*12
Valeur copies partielles	(n+1)*16
Krivine GC	(n+1)*16
Valeur GC	(n+1)*16
Nécessité	(n+3)*16

Expression	GOI : parcours de radicaux	β-réductions
`I I ... I I 3` (n `I`)	$2^n - 1$	n

Sur cet exemple la machine de Krivine est très efficace, car son environnement reste vide, ce qui évite toute copie de données, alors que pour la GOI, le nombre d'étapes de recherche d'une variable est très important (ceci se voit sur le nombre de parcours de radicaux qui croît exponentiellement, alors que le nombre de β-réductions proprement dites est égal au nombre d'identités dans le terme). La GOI et la machine à pile de questions ont ici une complexité exponentielle alors que les autres ont une complexité linéaire.

Sur ce type de terme très simple, la principale optimisation de la deuxième version de la GOI est la diminution du nombre de contractions, car `I` est partagé grâce à des contractions. Les sorties de boîtes et les dérélictions restent inchangées. Le résultat sur le temps d'exécution est quand même appréciable.

3.2 Listes

Les exemples sur les listes utilisent le listing suivant :

```
let rec length = fn a =>
   if isnil a
   then 0
   else succ (length (tl a));;

let rec append = fn a => fn b =>
   if isnil a
   then b
   else (hd a) :: append (tl a) b;;

let rec rev2 = fn x =>
   if isnil x
   then x
   else (append (rev2 (tl x)) [hd x]);;

(* listIt *)
let rec listIt = fn f => fn l => fn e =>
   if isnil l
   then e
   else (f (hd l) (listIt f (tl l) e));;

(* partition prend une fonction de test booléenne t et une liste l
et la partage en deux sous-listes, suivant le résultat du test *)
let partition = fn t => fn l =>
   let switch = fn e => fn l2 =>
      if (t e) then [hd l2; e :: hd (tl l2)]
               else [e :: hd l2; hd (tl l2)]
   in (listIt switch l [[];[]]);;

(* quicksort *)
let rec quicksort = fn l =>
   if isnil l
   then []
   else if (length l) = 1
        then l
        else let l1 = hd(partition (fn x => (hd l) <= x) (tl l)) in
             let l2 = hd(tl(partition (fn y => (hd l) < y) (tl l)))
             in (append (quicksort l1) ((hd l)::(quicksort l2)));;

(* genlist prend un entier n et crée la liste des entiers de n à 0
dans l'ordre décroissant *)
let rec genlist = fn n =>
   if iszero n
   then []
   else n :: (genlist n-1);;

let parti = fn a => fn l =>
   let switch = fn e => fn l2 =>
      if e < a then [e :: hd l2; hd (tl l2)]
               else if e > a then [hd l2; e :: hd (tl l2)]
```

```
                              else l2
   in listIt switch l [[];[]];;

let rec quicksort2 = fn [] => []
                       | [a] => [a]
                       | (a::l) => let part = parti a l in
                                   append (quicksort2 (hd part))
                                    (a::quicksort2 (hd (tl part)));;

let rec sigma = fn [] => 0
                | a::l => a + (sigma l);;
```

L'algorithme de retournement de liste est volontairement peu efficace, pour voir facilement les différences de vitesse sans avoir à utiliser des listes trop longues.

La première version de quicksort est prise dans les exemples du logiciel de réduction optimale, tandis que la deuxième est une version un peu plus optimisée et en même temps un exemple d'utilisation du filtrage.

Le compilateur de la réduction optimale ne peut pas afficher les listes. Pour pouvoir l'inclure dans les comparaisons, il a donc fallu rajouter une application de fonction (`sigma`) pour obtenir un entier et non une liste.

Temps (ms)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`sigma (rev2 [1;2;3;4;5;6;7])`	271	733	7683	30
`sigma (rev2 [1;2;..;9;10])`	13983	38783	732833	50
`sigma (quicksort (genlist 4))`	2167	4633	90083	40
`sigma (quicksort (genlist 5))`	49467	115033	Non testé	90
`sigma (quicksort2 (genlist 4))`	1067	2450	57400	40
`sigma (quicksort2 (genlist 5))`	26083	56783	Non testé	70
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`sigma (rev2 [1;2;3;4;5;6;7])`	2267	571	145	0,81
`sigma (rev2 [1;2;..;9;10])`	Non testé	52333	7283	1,73
`sigma (quicksort (genlist 4))`	28567	1900	1200	1,76
`sigma (quicksort (genlist 5))`	Non testé	45117	30467	2,48
`sigma (quicksort2 (genlist 4))`	12367	1400	668	1,1
`sigma (quicksort2 (genlist 5))`	Non testé	33567	16150	1,53
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml Light
`sigma (rev2 [1;2;3;4;5;6;7])`	2,63	1,33	0,66	0,6
`sigma (rev2 [1;2;..;9;10])`	7,06	3,66	1,1	1,0
`sigma (quicksort (genlist 4))`	200	2,78	1,21	0,9
`sigma (quicksort (genlist 5))`	2167	3,0	1,53	1,3
`sigma (quicksort2 (genlist 4))`	86,8	1,4	0,71	0,6
`sigma (quicksort2 (genlist 5))`	493	2,58	1,11	0,7

Occupation mémoire (octets)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`sigma (rev2 [1;2;3;4;5;6;7])`	904	1 904	6 308	
`sigma (rev2 [1;2;..;9;10])`	1 624	3 404	14 444	
`sigma (quicksort (genlist 4))`	756	1 564	7 668	
`sigma (quicksort (genlist 5))`	1 076	2 224	Non testé	
`sigma (quicksort2 (genlist 4))`	780	1 612	7 896	
`sigma (quicksort2 (genlist 5))`	1 116	2 312	Non testé	
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`sigma (rev2 [1;2;3;4;5;6;7])`	16 544	1 900	1 488	1 392
`sigma (rev2 [1;2;..;9;10])`	Non testé	3 400	2 568	2 352
`sigma (quicksort (genlist 4))`	21 180	1 652	1 492	1 392
`sigma (quicksort (genlist 5))`	Non testé	2 384	2 052	1 792
`sigma (quicksort2 (genlist 4))`	22 904	5 268	1 412	2 080
`sigma (quicksort2 (genlist 5))`	Non testé	11 188	1 972	2 784
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml Light
`sigma (rev2 [1;2;3;4;5;6;7])`	1 880	688	592	
`sigma (rev2 [1;2;..;9;10])`	3 500	976	832	
`sigma (quicksort (genlist 4))`	66 560	864	752	
`sigma (quicksort (genlist 5))`	717 760	1 184	992	
`sigma (quicksort2 (genlist 4))`	30 580	1 104	848	
`sigma (quicksort2 (genlist 5))`	151 160	1 616	1 136	

	GOI :	β-réductions		
	Parcours	Nom	Valeur,	Réd. opt.
Expression	de radicaux		Nécessité	
`sigma(rev2 [1;2;3;4;5;6;7])`	34 982	29 078	72	30
`sigma(rev2 [1;2;...;9;10])`	1 480 041	1 247 912	132	42
`sigma(quicksort (genlist 4))`	374 258	247 165	159	59
`sigma(quicksort (genlist 5))`	8 740 858	5 723 300	239	71
`sigma(quicksort2 (genlist 4))`	190 925	122 663	80	49
`sigma(quicksort2 (genlist 5))`	4 425 295	2 820 365	119	60

	Dérélictions		Contractions	
Expression	GOI	GOI non-opt	GOI	GOI non-opt
`sigma(rev2 [1;2;3;4;5;6;7])`	56 386	282 356	463 584	644 796
`sigma(rev2 [1;2;...;9;10])`	2 363 418	15 017 768	25 779 306	36 540 822
`sigma(quicksort (genlist 4))`	901 126	2 014 382	2 520 172	3 258 668
`sigma(quicksort (genlist 5))`	21 083 312	48 410 974	61 725 020	79 850 394
`sigma(quicksort2 (genlist 4))`	485 564	1 019 968	1 348 752	1 726 844
`sigma(quicksort2 (genlist 5))`	11 219 444	24 394 754	32 819 654	42 100 622

	Sorties de boîtes	
Expression	GOI	GOI non-opt
`sigma(rev2 [1;2;3;4;5;6;7])`	44 718	270 668
`sigma(rev2 [1;2;...;9;10])`	1 860 560	14 514 910
`sigma(quicksort (genlist 4))`	814 118	2 198 006
`sigma(quicksort (genlist 5))`	20 153 164	54 875 202
`sigma(quicksort2 (genlist 4))`	397 668	1 078 974
`sigma(quicksort2 (genlist 5))`	9 817 388	26 918 910

Nombre de cellules copiées	Question	Krivine Cop. comp.	Valeur Cop. comp.	Krivine Cop. part.	Valeur Cop. part.
`sigma (rev2 [1;2;3;4;5;6;7])`	906 979	498 638	856	171 918	331
`sigma (rev2 [1;2;...;9;10])`	74 007 766	Non testé	2 167	10 638 648	802
`sigma (quicksort (genlist 4))`	11 557 150	9 467 512	34 317	524 800	475
`sigma (quicksort (genlist 5))`	Non testé	Non testé	336 174	12 735 089	884
`sigma (quicksort2 (genlist 4))`	7 087 125	4 085 084	11 736	401 553	427
`sigma (quicksort2 (genlist 5))`	Non testé	Non testé	59 636	9 287 281	798

Pour l'exemple ci-dessus, la machine à questions réponses est moins rapide que les GOI optimisée et non optimisée, ce qui s'explique par les nombreuses questions posées (à chaque expression conditionnelle, test `isnil` ou `iszero` ou opération arithmétique) qui conduisent à beaucoup de copies. La machine de Krivine est ici plus rapide que la machine de questions-réponses, ce qui surprend quelque peu étant donné ses performances décevantes dans les premiers exemples. Ceci est nettement corrélé avec le nombre de copies, qui est lui aussi plus faible pour la machine de Krivine que pour les questions-réponses.

Du fait que chaque variable est appelée plusieurs fois, les machines à appel par nom ont une complexité qui croît nettement plus vite que celle des autres machines, et ceci se retrouve sur le nombre de β-réductions, beaucoup plus élevé pour l'appel par nom que pour les appels par valeur et par nécessité.

L'optimisation de la GOI réduit de façon très importante le nombre de dérélictions et de sorties de boîtes dans l'exemple du retournement de listes (le rapport est de 5 à 8). Par contre, l'effet sur les contractions est peu important, et les conséquences sur le temps d'exécution sont sensiblement les mêmes que pour le λ-calcul pur (facteur 2 environ).

En temps d'exécution, l'appel par nécessité, l'appel par valeur avec GC et Caml Light sont plus performantes que la réduction optimale. Ceci s'explique car l'avantage en nombre de β-réductions est faible en faveur de la réduction optimale (facteur 2 à 3) et ne suffit pas à compenser la lourdeur du travail sur le graphe du programme.

3.3 Calculs arithmétiques

Les exemples de calculs arithmétiques sont pris dans le programme suivant :

```
(* Fonctions arithmétiques *)

let rec add = fn x => fn y =>
   if iszero x
   then y
   else (succ (add (pred x) y));;

let rec mult = fn a => fn b =>
   if iszero a
   then 0
   else (add b (mult (pred a) b));;

let rec power = fn x => fn y =>
   if iszero y
   then 1
   else (mult x (power x (pred y)));;
```

Temps (ms)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`add 50 3`	4,93	9,16	23,3	30
`add 250 3`	101	203	725	130
`mult 10 12`	7,3	13,3	112,1	50
`mult 50 50`	465	883	50700	750
`power 4 2`	10,8	18,1	107,1	20
`power 4 3`	767	1417	23017	50
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`add 50 3`	Non testé	9,63	2,68	1
`add 250 3`	Non testé	253	46	5,53
`mult 10 12`	Non testé	10,23	3	2,6
`mult 50 50`	Non testé	881	153	49,1
`power 4 2`	Non testé	12	6,28	0,73
`power 4 3`	Non testé	1030	441	2,03
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml Light
`add 50 3`	1,26	0,63	0,61	0,4
`add 250 3`	5	2,91	2,78	1,8
`mult 10 12`	3,13	1,48	1,48	1,1
`mult 50 50`	56	26,6	25,3	14,3
`power 4 2`	0,9	0,51	0,48	0,3
`power 4 3`	2,63	1,23	1,18	0,7

Occupation mémoire (octets)				
GOI	opt	non-opt	Question	Réd. opt.
`add 50 3`	1 268	3 684	3 772	
`add 250 3`	6 068	18 084	18 172	
`mult 10 12`	1 532	2 604	4 684	
`mult 50 50`	22 460	27 276	75 556	
`power 4 2`	556	988	2 352	
`power 4 3`	1 428	2 180	7 792	
Krivine : copies	complètes	partielles	GC	Nécessité
`add 50 3`	Non testé	2 472	3 284	3 408
`add 250 3`	Non testé	12 072	16 084	16 208
`mult 10 12`	Non testé	2 424	2 900	4 464
`mult 50 50`	Non testé	34 272	44 084	81 840
`power 4 2`	Non testé	1 128	1 124	880
`power 4 3`	Non testé	2 880	3 156	2 800
Valeur : copies	complètes	partielles	GC	Caml Light
`add 50 3`	1 200	896	896	
`add 250 3`	5 200	4 096	4 096	
`mult 10 12`	800	576	576	
`mult 50 50`	3 160	2 464	2 464	
`power 4 2`	400	256	256	
`power 4 3`	640	448	448	

	GOI : Parcours	β-réductions		
Expression	de radicaux	Nom	Valeur, Nécessité	Réd. opt.
`add 50 3`	153	102	102	102
`add 250 3`	753	502	502	502
`mult 10 12`	1 127	282	282	48
`mult 50 50`	72 777	5 202	5 202	204
`power 4 2`	2 083	932	82	26
`power 4 3`	154 339	63 524	230	52

Expression	Dérélictions GOI	Dérélictions GOI non-opt	Contractions GOI opt et non-opt
`add 50 3`	310	3 060	5 610
`add 250 3`	1 510	65 260	128 010
`mult 10 12`	2 256	5 896	7 566
`mult 50 50`	145 556	415 956	546 006
`power 4 2`	3 808	8 108	8 816
`power 4 3`	284 064	617 372	680 912

Expression	Sorties de boîtes GOI	Sorties de boîtes GOI non-opt
`add 50 3`	5 402	8 152
`add 250 3`	127 002	190 752
`mult 10 12`	5 592	9 232
`mult 50 50`	405 652	676 052
`power 4 2`	5 940	10 240
`power 4 3`	460 372	793 680

Nombre de cellules copiées	Question	Valeur Cop. comp.	Krivine Cop. part.	Valeur Cop. part.
`add 50 3`	2 755	302	1 326	51
`add 250 3`	63 755	1 502	31 626	251
`mult 10 12`	11 985	842	1 746	151
`mult 50 50`	3 521 755	15 602	133 926	2 651
`power 4 2`	14 675	242	3 050	51
`power 4 3`	2 522 651	686	265 138	130

Le calcul de puissance, `power x y`, est très défavorable à l'appel par nom, car les paramètres sont évalués plusieurs fois, et ceci récursivement, d'où un rapport exponentiel en y : à y fixé, le nombre de β-réductions est un polynôme en x de degré $\frac{y(y+1)}{2}$ pour l'appel par nom, et seulement y pour les appels par valeur et par nécessité.

L'optimisation de la GOI réduit de façon importante le nombre de dérélictions (Le rapport, qui croît avec le premier nombre à ajouter, varie de 10 à 40 dans les exemples cités). Par contre, le nombre de contractions est inchangé car chaque variable est référencée au plus deux fois. Les sorties de boîtes sont aussi moins nombreuses mais le facteur avoisine seulement 1,5.

L'évaluation par valeur ou par nécessité n'effectue pas plus de β-réductions que la réduction optimale dans le cas de l'addition. La complexité des opérations sur le graphe du programme fait que cette dernière est moins rapide que les machines à appel par valeur ou par nécessité et que Caml Light dans cet exemple. Elle est moins défavorisée pour la multiplication et l'élévation à la puissance mais reste plus lente.

Contrairement au λ-calcul pur, dans les cas de calculs arithmétiques ou sur les listes, la machine à questions-réponses est moins performante car il y a beaucoup d'arrêts sur le chemin du retour pour modifier la valeur calculée. Alors le temps pris par les copies d'environnements devient important, et la machine est nettement moins rapide que la GOI. Dans les programmes habituels, cette optimisation n'est donc pas très intéressante (l'évaluation de termes du λ-calcul pur n'est pas ce qu'on rencontre le plus souvent dans les applications pratiques !).

Ce problème de copies trop nombreuses se pose aussi pour la machine de Krivine : dans l'exemple de l'addition, on a la succession d'états suivante (si `x1` = `pred x` $\neq 0$) :

Terme à évaluer	Env.	Pile
`add (pred x) y`	e	s
`add = fn x1 => fn y1 => if ...`	e	(`pred x`,e) :(`y`,e) :s
`fn y1 => if iszero x1 then y1 else (succ ...)`	(`pred x`,e) :e	(`y`,e) :s
`if iszero x1 then y1 else (succ ...)`	(`y`,e) :(`pred x`,e) :e	s
`succ (add (pred x1) y1)`	(`y`,e) :(`pred x`,e) :e	s
`add (pred x1) y1`	(`y`,e) :(`pred x`,e) :e	(`succ`, NIL) :s

La taille de l'environnement triple donc à chaque appel récursif, et il y a autant d'appels que la valeur du premier nombre à ajouter, `x`, donc la taille des données croît de Krivine, et comme un phénomène analogue se produit dans les autres exemples, cela fait d'elle la moins performante des implémentations réalisées ici, aussi bien en temps d'exécution qu'en occupation mémoire. Ceci montre l'intérêt de l'implémentation à partage d'environnements et GC.

Une démonstration analogue permet de prouver que dans cet exemple la taille des structures manipulées par la machine à appel par valeur est linéaire, bien qu'elle effectue des copies d'environnements. En effet, les copies sont éliminées juste après l'évaluation des paramètres (car ce sont ici des valeurs de types simples, donc indépendantes de l'environnement), et donc avant d'entrer dans le tour de boucle suivant. Ainsi l'appel par valeur est nettement plus performant que la machine de Krivine, non seulement à cause d'un nombre de β-réductions plus réduit en général (ce qui est logique, l'appel par nom répétant plusieurs fois un même calcul si une variable est appelée plusieurs fois) mais aussi à cause de sa meilleure gestion des copies d'environnements.

Chapitre 4

Conclusion

Par comparaison avec Caml Light, la plupart des temps d'exécution sont très longs. Les machines irréversibles avec GC sont assez performantes autant en temps d'exécution qu'en capacité mémoire (moins évidemment pour l'appel par nom que pour l'appel par valeur). La GOI est performante en consommation mémoire mais pas en temps d'exécution.

Le résultat le plus marquant est que la GOI est plus performante que la machine de Krivine avec copies complètes. Ceci est dû au fait que les machines de Krivine et par valeur avec copies complètes gèrent mal la mémoire. Les implémentations à copies partielles améliorent de façon importante cette situation, et celles avec GC encore plus.

La GOI optimisée est environ deux fois plus efficace que la version non optimisée, mais ces deux machines souffrent du nombre d'opérations qu'elles utilisent pour accéder aux variables. La machine à pile de questions souffre aussi de ces problèmes de copies trop nombreuses. De ce fait, si elle est plus efficace dans le cas du λ-calcul pur comme on pouvait le prévoir, elle perd de son intérêt dès qu'on sort de ce cadre, intéressant du point de vue théorique mais peu utilisé dans les applications pratiques.

On peut cependant espérer une amélioration quand l'appel par valeur, par nécessité, ou mieux la réduction optimale sera implémentée sur le modèle de la GOI.

On a ici donné une implémentation simple des langages fonctionnels, mais on a aussi montré la distance entre une telle implémentation et les compilateurs professionnels existants.

Bibliographie

[Abr91] Samson ABRAMSKY. – Semantics of PCF, 4 novembre 1991.

[Abr93] Samson ABRAMSKY. – Computational Interpretations of Linear Logic. *Journal of Theoretical Computer Science*, 1993, pp. 111 :3–57. – Version précédente parue comme Imperial College Technical Report DOC 90/20, octobre 1990.

[Asp95] Andrea ASPERTI. – $\delta \circ !\epsilon = 1$. *In : Proceedings of the 6th Rewriting Techniques and Applications Conference (RTA'95)*, éd. par Jieh HSIANG. pp. 102 – 116. – Springer Verlag.

[DR93] Vincent DANOS et Laurent REGNIER. – Local and asynchronous beta-reduction (an analysis of Girard's execution formula). *In : Proceedings, Eighth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. IEEE Computer Society Press, pp. 296–306.

[DR94] Vincent DANOS et Laurent REGNIER. – Reversible & Irreversible Computations, GOI and λ-machines, 1994.

[Gir89] Jean-Yves GIRARD. – Geometry of interaction 1 : Interpretation of System F. *In : Logic Colloquium 88*, éd. par R. FERRO, C. BONOTTO, S. VALENTINI et A. ZANARDO. – Amsterdam, 1989.

[Mac94a] Ian MACKIE. – *The Geometry of Implementation.* – Thèse de PhD, Imperial College of Science & Technology, septembre 1994.

[Mac94b] Ian MACKIE. – Lilac : a functional programming language based on linear logic. *Journal of Functional Programming*, octobre 1994, pp. 395–433.

[Mac95] Ian MACKIE. – The Geometry of Interaction Machine. *In : Proceedings, 22nd ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 198–208.

Quatrième partie

Stage de DEA : *Garbage Collection* statique

Sous la direction de M. Alain Deutsch
Alain.Deutsch@inria.fr

Chapitre 1

Introduction

L'objectif de ce stage est d'étudier et d'implémenter une optimisation de l'allocation des données dans les langages à *garbage collector* (GC). Le GC récupère automatiquement la place occupée par les données qui ne sont plus référencées au cours de l'exécution des programmes. Cependant ce mécanisme prend du temps. Le but du projet est d'allouer autant que possible les données en pile, pour les libérer sans faire appel au GC. Le travail peut se décomposer en deux phases : on commence par effectuer une analyse par interprétation abstraite [CC77, CC79] pour déterminer les données qui peuvent effectivement être allouées en pile, c'est-à-dire celles dont la durée du vie ne dépasse pas la portée lexicale. Cette analyse est appelée analyse d'échappement. Ensuite, on transforme le programme en conséquence pour que les données voulues soient effectivement allouées en pile. Le langage analysé est Caml Special Light (CSL), mais il est prévu d'adapter le programme à Objective Caml qui est la nouvelle version de CSL.

Les résultats expérimentaux montrent qu'on obtient ainsi une optimisation de 5 à 20 % sur beaucoup de programmes. L'amélioration obtenue dépend de façon importante des caractéristiques du processeur utilisé (en particulier de la taille du cache mémoire). C'est pourquoi on a effectué une comparaison entre différentes machines : SparcStation 5, Alpha, Pentium Pro.

Ces essais montrent que l'affirmation d'A. Appel [App87] selon laquelle la *garbage collection* peut être plus rapide que l'allocation en pile, n'est valable que si la quantité de mémoire disponible est nettement supérieure à celle vraiment nécessaire. Ceci n'est pas le cas en général car malgré l'augmentation rapide de la quantité de mémoire disponible sur les ordinateurs, elle reste limitée par rapport à la taille utile qui augmente elle aussi dans les mêmes proportions.

1.1 Travaux associés

Les travaux les plus proches du nôtre sont ceux de Park et Goldberg [PG92] : ils effectuent une analyse d'échappement sur les listes. Nous implémentons cette analyse avec une complexité en $\mathcal{O}(n \log^2 n)$, selon la méthode montrée par A. Deutsch [Deu97], et nous la généralisons aux types inductifs, avec aussi des constructions impératives et un traitement (certes approximatif) des fonctions d'ordre supérieur. Nous avons aussi étendu les stratégies de transformation de programme en exploitant les résultats de l'analyse sémantique, et nous avons effectué de nombreuses expérimentations pour en déterminer avec précision les résultats.

M. Mohnen [Moh95b, Moh95a] effectue une analyse assez voisine de la nôtre, mais son algorithme a une complexité quadratique, et le langage analysé est du premier ordre sans opérations impératives.

S. Hughes [Hug92] introduit déjà une représentation avec des niveaux entiers pour l'échappement des données, mais utilise une analyse en deux étapes (génération et héritage). Il analyse un langage d'ordre supérieur purement fonctionnel, mais l'optimisation qu'il effectue est différente de la nôtre : il n'alloue pas en pile, mais mémorise les adresses qui devront être libérées pour éviter de les rechercher avec le GC. Le travail le plus proche de ce-dernier est celui de Inoue, Seki et Yagi [ISY88], qui eux récupèrent seulement le sommet des listes, mais donnent des résultats expérimentaux intéressants.

Une autre optimisation de l'allocation a été proposée par M. Tofte et J.-P. Talpin [TT93], et expérimentée dans [BTV96] : l'allocation en régions. L'étude a été poursuivie dans [AFL95]. Toutes les données sont allouées dans des régions de taille non fixée au départ en général, mais pour lesquelles on a une borne sur la durée de vie. On peut alors libérer les régions sans utiliser de GC. Cette analyse résoud un problème plus général que la nôtre mais au prix d'une complexité nettement plus grande, et en fait sur beaucoup de programmes les opportunités d'allocation en pile sont plus nombreuses que celles d'allocation en régions.

A. Deutsch introduit une analyse d'alias [Deu94] qui donnerait des informations beaucoup plus précises, mais qui est malheureusement trop complexe pour être appliquée à de gros programmes.

Une autre technique d'analyse utilisable pour déterminer les possibilités d'allocation en pile est l'utilisation d'un compteur de référence, proposée dans [Hud86]. P. Hudak l'applique ici à la mise à jour en place et uniquement pour des tableaux fonctionnels. L. Hederman [Hed88] reprend cette technique pour l'appliquer à l'allocation en pile.

M. Serrano et M. Feeley [SF96] décrivent une technique d'analyse d'échappement intéressante, la "Storage Use Analysis" (analyse d'utilisation de la mémoire), qui malgré sa complexité en $\mathcal{O}(n^4)$ est rapide à exécuter et donne des optimisations importantes. Malheureusement, ce travail mêle deux optimisations indépendantes, l'allocation en pile et l'*unboxing* de tableaux. Cette implémentation, extrêmement proche des travaux de Jones et Muchnick [JM82], Harrison [Har89], Deutsch [Deu90] et Shivers [Shi88], a été réalisée sur le compilateur Bigloo 1.8.

J. Hannan [Han95] utilise des types annotés pour décrire les informations d'échappement. Les résultats obtenus sont nettement moins bons que ceux de notre analyse (par exemple, dans $\lambda x.\lambda y.(x + y)$, seul le paramètre passé pour y pourra jamais être mis en pile, car lors d'une application partielle x s'échappe). De plus, il donne uniquement des règles d'inférence, et pas d'algorithme de calcul des types annotés.

Chapitre 2

Analyse d'échappement

Cette analyse s'inspire de celle définie dans [PG92], mais on l'étend et on l'implémente en temps $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ où n est la taille du programme.

2.1 Quelques notations

Je ne rappelle ici que les notations mathématiques générales. Les autres seront définies au fur et à mesure des besoins.

Les fonctions sont manipulées ainsi :

- $\{x_1 \mapsto y_1, ..., x_n \mapsto y_n\}$ désigne la fonction qui à x_i associe y_i pour i dans $[1, n]$.
- $f[x_1 \mapsto y_1, ..., x_n \mapsto y_n]$ désigne le prolongement de f qui à x_i associe y_i pour i dans $[1, n]$. Si f était déjà définie en certains de ces points, la nouvelle valeur remplace l'ancienne.
- $f_{|E}$ désigne la restriction de f à l'ensemble E.
- $\mathrm{Dom}(f)$ est le domaine de définition de f

Les listes sont manipulées comme suit :

- S^* désigne l'ensemble des listes dont les éléments sont dans S.
- [] est la liste vide.
- $[p_1, \ldots, p_n]$ est la liste d'éléments $p_1, \ldots, p_n$.
- $p_1 : l$ désigne la liste l à laquelle on a concaténé en tête l'élément p_1.
- $l(i)$ désigne le i^{e} élément de la liste l.

$FV(M)$ est l'ensemble des variables libres de M.
Dans un treillis, la borne supérieure est $\sqcup$ et la borne inférieure $\sqcap$.

2.2 Le langage analysé

2.2.1 Syntaxe

L'analyse a été réalisée sur le langage Caml Special Light. Pour la description théorique du système, on se contente ici d'un sous-ensemble restreint de ce langage. Il comprend les types suivants :

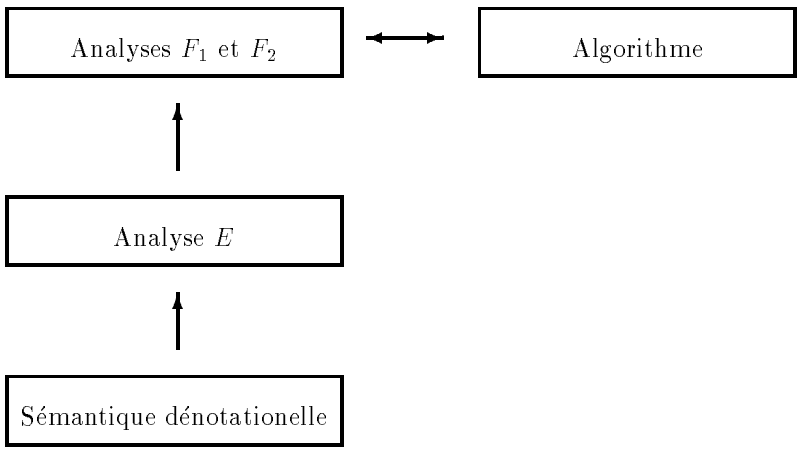
$$\tau = \tau_1 \to \tau_2 \mid \tau \texttt{ list} \mid \tau_1 * \tau_2 \mid \tau \texttt{ ref} \mid \texttt{bool} \mid \texttt{int} \mid \texttt{unit}$$

Les entiers se traitent comme les booléens, les enregistrements et les n-uplets comme les paires. Les champs mutables se traitent en s'inspirant des références. On dispose des expressions :

$e =$ `v`
| `let x=`e_1 `in` e_2
| `let rec f(x)=`e_1 `in` e_2
| $e_1\ e_2$
| `fun x` $\rightarrow e$
| `true` | `false` | `0` | `1` | ...
| e_1 `::` e_2 | `[]`
| `hd` | `tl` | `null`
| `ref` | `!` | `:=`
| (`,`)
| `fst` | `snd`
| e_1 `;`e_2
| `if` e_1 `then` e_2 `else` e_3

L'opérateur d'affectation `:=` est infixe. On généralise facilement le `let rec` donné ici au cas des fonctions mutuellement récursives.

On associe à ce langage plusieurs sémantiques, en commençant par une sémantique exacte puis en l'approchant par des sémantiques abstraites comme indiqué sur la figure ci-dessous. La sémantique la plus abstraite est équivalente à l'algorithme utilisé.



2.2.2 Sémantique

On utilise ici une sémantique dénotationnelle avec état et non-terminaison. On utilise les domaines :

- Variables : $x \in Var$.
- Locations ou cellules mémoire (ensemble dénombrable) : $\ell \in Loc$.
- Valeurs : $Val = \{\text{true}, \text{false}, \text{NIL}\} \cup \mathbb{Z} \cup Loc$.
- $SV = (Val \cup Val \times Val \cup (Env \rightarrow Exp) \times Env \times Var)$, $Store = (Loc \times SV)^*$ est l'ensemble des états. On note $s[\ell \mapsto v]$ pour $(\ell, v) : s$ et $s(\ell)$ est tel que $(\ell, s(\ell))$ est le premier élément de s de la forme $(\ell, _)$. On fait donc comme si $Store = Loc \rightarrow SV$ mais on utilise une liste au lieu d'une vraie fonction pour pouvoir retrouver les modifications faites à un état, ce qui sera utile dans la définition de l'analyse. Ceci est analogue à la définition des traces d'exécution d'Hoare [Hoa78] comme suites de tests et d'affectations, mais on n'a pas besoin de conserver les tests ici. Un état associe à chaque cellule son contenu. Ce contenu peut être une valeur pour les références, un couple de valeurs pour les couples et les listes (non vides) ou une fermeture pour les fonctions. Les états sont en général notés $s, s' \ldots$

- Expressions : $Exp = Store \to (Val \times Store)_\perp$.
- Environnments : $Env = Var \to (Store \times Val)$. On stocke non seulement la valeur, mais l'état dans lequel elle a été créée. On définit $e[\![x]\!] = v$ si $e(x) = (s, v)$.

On peut spécifier plus précisément le domaine des valeurs pour chaque type :

$Val[\![\texttt{bool}]\!] = \{\text{true}, \text{false}\}$
$Val[\![\texttt{int}]\!] = \mathbb{Z}$
$Val[\![\texttt{unit}]\!] = \{\text{NIL}\}$
$\ell \in Val[\![\tau_1 \to \tau_2]\!]$ si $\ell \in Loc$ et $s(\ell) = (f, e, x), x \in Var, e \in Env, f \in Env[\![x \in \tau_1]\!] \to Exp[\![\tau_2]\!]$
$\ell \in Val[\![\tau_1 * \tau_2]\!]$ si $\ell \in Loc$ et $s(\ell) \in Val[\![\tau_1]\!] \times Val[\![\tau_2]\!]$
$\ell \in Val[\![\tau\ \texttt{ref}]\!]$ si $\ell \in Loc$ et $s(\ell) \in Val[\![\tau]\!]$
$\ell \in Val[\![\tau\ \texttt{list}]\!]$ si $\ell \in Loc$ et $s(\ell) \in Val[\![\tau]\!] \times Val[\![\tau\ \texttt{list}]\!]$ ou $\ell = \text{NIL}$ pour la liste vide.
$Exp[\![\tau]\!] = Store \to (Val[\![\tau]\!] \times Store)_\perp$
$Env[\![x \in \tau]\!] = \{e \in Env | e(x) \in Val[\![\tau]\!]\}$

La fonction sémantique a le domaine suivant : $[\![M]\!] : Env \to Exp$.
Soient les abréviations :

- up est l'injection de $Val \times Store$ dans $(Val \times Store)_\perp$.
- let $[x] = h$ in $g = \begin{cases} \perp & \text{si } h = \perp, \\ g[x'/x] & \text{si } h = \text{up}(x'). \end{cases}$
- $\text{newloc}(s, v) = \text{up}(\ell, s[\ell \mapsto v])$ où ℓ est une nouvelle cellule, qui sera initialisée à la valeur v.
- let $(\ell_1, \ell_2) = s(\ell)$ in g indique que ℓ_1 désigne la première composante du couple $s(\ell)$, et ℓ_2 la deuxième. Dans le cas où ℓ est une liste (qui est aussi un couple si la liste est non vide), cette notation n'est autorisée que si ℓ est non vide, sinon il se produit une erreur à l'exécution. Pour simplifier, le cas d'erreur n'est pas considéré dans la sémantique.

et les équations sémantiques sont rassemblées sur la figure 2.1

2.3 Première version de l'analyse

Cette analyse peut être appliquée telle que à n'importe quel langage fonctionnel, même non typé. C'est une analyse très précise, donc elle peut être utilisée comme base pour beaucoup d'analyses moins précises que l'on peut déduire par interprétation abstraite. Le coût de ceci est qu'elle ne peut pas être implémentée directement car elle est trop complexe. On devra donc effectuer une deuxième étape d'approximation (dans la section suivante).

C'est une analyse par interprétation abstraite. Les domaines abstraits associés aux données sont des chemins d'accès qui représentent les parties utilisées (figure 2.2) :

$$Chem = \text{g}.Chem | \text{d}.Chem | \text{app}.Chem | \top | \perp$$

où $\top$ indique que toute la donnée est utilisée ; $\perp$ indique que rien n'est utilisé ; g indique que la partie gauche d'un couple, ou la tête d'une liste, ou le contenu d'une référence est utilisé ; d indique que la partie droite d'un couple ou la queue d'une liste est utilisée. Enfin, app indique que la fonction est appliquée à un argument.

On définit les restrictions des chemins par :

- $\text{app}.c_{|\to} = c$, $c_{|\to} = \perp$ si c n'est pas de la forme $\text{app}.c'$.
- $\top.|g = \top$, $\text{g}.c_{|g} = c$, $c_{|g} = \perp$ dans les autres cas. On définit de même $|d$.

$[\![M]\!] : Env \to Exp$
$[\![x]\!]es = \mathrm{up}(e[\![x]\!], s)$
$[\![M\ N]\!]es = \mathrm{let}\ [(f', s')] = [\![M]\!]es\ \mathrm{in}\ \mathrm{let}\ [(v, s'')] = [\![N]\!]es'\ \mathrm{in}\ \mathrm{let}\ (m, e', x) = s'(f')\ \mathrm{in}\ m(e'[x \mapsto v])s''$
$[\![\mathtt{fun}\ x \to M]\!]es = \mathrm{newloc}(s, ([\![M]\!], e_{|FV(\mathtt{fun}\ x \to M)}, x))$ [a]
$[\![\mathtt{let}\ x = M\ \mathtt{in}\ N]\!]es = \mathrm{let}\ [(v, s')] = [\![M]\!]es\ \mathrm{in}\ [\![N]\!](e[x \mapsto v])s'$
$[\![\mathtt{let\ rec}\ f(x) = M\ \mathtt{in}\ N]\!]es = [\![N]\!](e[f \mapsto (s', \ell)])s'$ où $\ell \notin \mathrm{Dom}(s)$, $s' = s[\ell \mapsto (\phi, e_{|FV(\mathtt{fun}\ x \to M)}, x)]$
et $\phi = \mathrm{lfp}(\lambda\phi_1.\lambda e_1.\lambda s_1.[\![M]\!](e_1[f \mapsto (s_1', \ell)])s_1')$ où s_1' est l'état s_1 où $s_1(\ell)$ a été remplacé par (ϕ_1, e_1, x) [b]
$[\![\mathtt{if}\ M\ \mathtt{then}\ N\ \mathtt{else}\ P]\!]es = \mathrm{let}\ [(x, s')] = [\![M]\!]es\ \mathrm{in}\ \mathrm{if}\ x\ \mathrm{then}\ [\![N]\!]es'\ \mathrm{else}\ [\![P]\!]es'$
$[\![M::N]\!]es = \mathrm{let}\ [(x, s')] = [\![M]\!]es\ \mathrm{in}\ \mathrm{let}\ [(y, s'')] = [\![N]\!]es'\ \mathrm{in}\ \mathrm{newloc}(s'', (x, y))$
$[\![(M, N)]\!]es = \mathrm{let}\ [(l_1, s')] = [\![M]\!]es\ \mathrm{in}\ \mathrm{let}\ [(l_2, s'')] = [\![N]\!]es'\ \mathrm{in}\ \mathrm{newloc}(s'', (l_1, l_2))$
$[\![M; N]\!]es = \mathrm{let}\ [(l, s')] = [\![M]\!]es\ \mathrm{in}\ [\![N]\!]es'$

Etat initial : $s_0 = \{\mathrm{ref} \mapsto (\lambda e.\lambda s'.\,\mathrm{newloc}(s', e[\![x]\!]), \emptyset, x), \mathrm{deref} \mapsto (\lambda e.\lambda s'.\,\mathrm{up}(s'(e[\![x]\!]), s'), \emptyset, x),$
$\mathrm{affect} \mapsto (\lambda e.\lambda s'.\,\mathrm{newloc}(s', (\lambda e'.\lambda s''.\,\mathrm{up}(\mathrm{NIL}, s''[e'[\![m]\!] \mapsto e'[\![n]\!]]), e, n)), \emptyset, m),$
$\mathrm{fst} \mapsto (\lambda e.\lambda s'.\,\mathrm{let}\ (h, t) = s'(e[\![x]\!])\ \mathrm{in}\ \mathrm{up}(h, s'), \emptyset, x),$
$\mathrm{snd} \mapsto (\lambda e.\lambda s'.\,\mathrm{let}\ (h, t) = s'(e[\![x]\!])\ \mathrm{in}\ \mathrm{up}(t, s'), \emptyset, x),$
$\mathrm{null} \mapsto (\lambda e.\lambda s'.(e[\![x]\!] = \mathrm{NIL}), \emptyset, x)\}$
Environnement initial : $e_0 = \{\mathtt{ref} \mapsto (s_0, \mathrm{ref}), ! \mapsto (s_0, \mathrm{deref}), := \mapsto (s_0, \mathrm{affect}), \mathtt{true} \mapsto (s_0, \mathrm{true}),$
$\mathtt{false} \mapsto (s_0, \mathrm{false}), n \mapsto (s_0, n)$ si $n \in \mathbb{Z}$, $\mathtt{[]} \mapsto (s_0, \mathrm{NIL}), \mathtt{hd} \mapsto (s_0, \mathrm{fst}),$
$\mathtt{tl} \mapsto (s_0, \mathrm{snd}), \mathtt{null} \mapsto (s_0, \mathrm{null}), \mathtt{fst} \mapsto (s_0, \mathrm{fst}), \mathtt{snd} \mapsto (s_0, \mathrm{snd})\}$.

[a] On crée des fermetures minimales, donc on ne stocke dans l'environnement de la fermeture que les variables libres de $\mathtt{fun}\ x \to M$.
[b] On n'écrit pas $s_1' = s_1[\ell \mapsto (\phi_1, e_1, x)]$ car on ne souhaite pas considérer ces modifications comme des affectations.

FIG. 2.1 – *Sémantique*

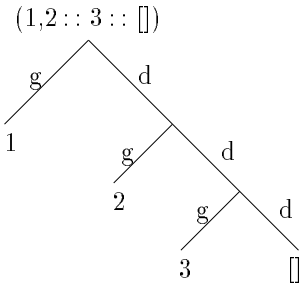


FIG. 2.2 – *Chemins. Par exemple, 2 est déigné par le chemin* d.g.$\top$

Les contextes associés aux données sont des ensembles non vides de chemins $Ctx \subseteq \mathcal{P}(Chem)$. En effet, un contexte vide correspondrait intuitivement à une expression non évaluée. Ici, à cause de l'appel par valeur, les expressions sont évaluées même si leur résultat n'est pas utile, et cette évaluation peut causer de l'échappement à cause des opérations impératives. Soit $\mathcal{P}^*(Chem) = \mathcal{P}(Chem) - \emptyset$. Ceci est un sup-demi-treillis, mais pas un treillis. Pour préserver la borne inférieure, il faut se restreindre à des contextes contenant au moins un élément fixé, $\bot$.

Si $\phi : Chem \to Chem$ est une fonction qui à p associe $\mathrm{g}.p, \mathrm{d}.p, \mathrm{app}.p, p_{|g}, p_{|d}, p_{|\to}$, on définit $\phi^P : \mathcal{P}^*(Chem) \to \mathcal{P}^*(Chem)$ par $\phi^P(c) = \{\phi(p) | p \in c\}$ et on veut définir $\mathrm{Ferm} : \mathcal{P}^*(Chem) \to Ctx$ and $\phi^C : Ctx \to Ctx$ tels que $\mathrm{Ferm} \circ \phi^P = \phi^C \circ \mathrm{Ferm}$, $c \subseteq \mathrm{Ferm}(c)$, $\bot \in \mathrm{Ferm}(c)$, $\mathrm{Ferm}(a \cup b) = \mathrm{Ferm}(a) \cup \mathrm{Ferm}(b)$, $\mathrm{Ferm} \circ \mathrm{Ferm} = \mathrm{Ferm}$ et $\mathrm{Ferm}(c)$ est aussi petit que possible (pour avoir des contextes aussi précis que possible).

$$\begin{array}{ccccc} Chem & \longrightarrow & \mathcal{P}^*(Chem) & \xrightarrow{\mathrm{Ferm}} & Ctx \\ \phi \downarrow & & \phi^P \downarrow & & \phi^C \downarrow \\ Chem & \longrightarrow & \mathcal{P}^*(Chem) & \xrightarrow{\mathrm{Ferm}} & Ctx \end{array}$$

On peut montrer que la solution est

- $\mathrm{Ferm}(c) = c \cup \{c_1.\bot | c_1.c_2 \in c\}$
- $c_{|\to} = \{c' | \mathrm{app}.c' \in c\} \cup \{\bot\}$.
- $c_{|g} = \{c' | \mathrm{g}.c' \in c \text{ ou } c' = \top \text{ si } \top \in c \text{ ou } c' = \bot\}$. On définit de même $|d$
- $\mathrm{g}.c = \{\mathrm{g}.c' | c' \in c\} \cup \{\bot\}$. On définit $\mathrm{d}.c$ de la même façon.
- $\mathrm{app}.c = \{\mathrm{app}.c' | c' \in c\} \cup \{\bot\}$.

La propriété $\mathrm{Ferm} \circ \phi^P = \phi^C \circ \mathrm{Ferm}$ montre qu'il suffit d'appliquer l'opérateur Ferm à la fin du calcul des contextes. On l'omettra dans la suite. Le chemin c et le contexte $\mathrm{Ferm}(\{c\})$ seront considérés comme identiques.

Les domaines utilisés sont les suivants :

- Contextes : $c \in Ctx = \mathrm{Ferm}(\mathcal{P}^*(Chem))$.
- Indices de paramètres : $i \in Ind = \mathbb{N}$.
- Le domaine abstrait d'une valeur ou d'une expression est $Exp^\# = Val^\# = Ctx \to (Var \cup Ind) \to Ctx$
- Environnement : $\rho \in Env^\# = Var \to Val^\#$.
- Fonction sémantique abstraite : $E[\![M]\!] : Env^\# \to Exp^\#$.
- Environnement de paramètres : $e_p \in Env_p = (Store \times Val)^*$ On spécifie en plus de la valeur du paramètre l'état dans lequel il est lié.

Définition 2.1 (Cellules accessibles) Je note $\ell \downarrow_s$ l'ensemble des cellules mémoire accessibles depuis la cellule ℓ dans l'état s. On étend cette définition aux valeurs par $v \downarrow_s = \emptyset$ si $v \in \{\mathrm{true}, \mathrm{false}, \mathrm{NIL}\} \cup \mathbb{Z}$ et aux environnements par $e \downarrow_s = \cup\{e[\![x]\!] \downarrow_s \mid x \text{ variable définie dans } e\}$. On note $\mathrm{loc}(s)$ l'ensemble des cellules existantes dans l'état s, $\mathrm{loc}(e_p) = \cup_{i, e_p(i) = (s_p, v_p)} v_p \downarrow_{s_p}$, $\mathrm{loc}(s, e_p) = \mathrm{loc}(s) \cup \mathrm{loc}(e_p)$.

Définition 2.2 (Ordre sur les états) On dit qu'un état s' est après s si sA^*s' où A^* est la fermeture réflexive et transitive de la relation A définie comme suit : $sAs' \Leftrightarrow s' = s[\ell \mapsto v]$ où $\ell \in Loc$; si $\ell \in \mathrm{Dom}(s)$, ℓ est mutable (c'est-à-dire a été créée par une référence) ; $v \in \mathrm{val}(s) \cup \mathrm{val}(s) \times \mathrm{val}(s) \cup (Env \to Exp) \times (Var \to \mathrm{val}(s)) \times Var$ et $\mathrm{val}(s) = \mathrm{loc}(s) \cup \{\mathrm{true}, \mathrm{false}, \mathrm{NIL}\} \cup \mathbb{Z}$. Intuitivement, s' peut être obtenu après s pendant l'exécution d'une programme (correct).

Définition 2.3 (Cellules stockées) Soit a : $Store \to \mathcal{P}(Loc)$ telle que $a(s)$ désigne l'ensemble des cellules apparues dans un membre droit d'affectation depuis l'état s_0 au début de l'exécution du programme jusqu'à l'état s. Plus précisément, $a([]) = \emptyset$, $a(s[\ell \mapsto v]) = a(s) \cup \ell\downarrow_{s'}$ si $\ell \in \mathrm{loc}(s)$ (une affectation) et $a(s[\ell \mapsto v]) = a(s)$ sinon (une allocation). Ces cellules comprennent toutes les locations des structures stockées (pas seulement leur sommet). Alors $a(s)$ est clos par $\downarrow_s$.

On note $a(s, s') = a(s') - a(s)$.

Remarque: Pour pouvoir définir cette notion à partir de l'état s uniquement, il faut supposer qu'il conserve l'histoire de ses modifications. C'est pour cela qu'on a défini les états comme des listes d'association et non comme des fonctions. Sinon, on peut aussi utiliser une sémantique à petits pas et définir cette notion à partir de la trace d'exécution.

Lemme 2.4 *$a(s, s'') = a(s, s') \cup a(s', s'')$ si s'' est après s' qui est après s.*

Preuve : Evident. □

Définition 2.5 (Concrétisation des contextes) Soit cell : $Store \times Val \times Ctx \times Env_p \to \mathcal{P}(Loc)$ telle que $\mathrm{cell}(s, v, c, e_p)$ représente l'ensemble des cellules qui s'échappent quand on conserve les cellules de contexte c de la valeur v dans l'état s. L'environnement e_p détermine les paramètres qui seront passés à la fonction v (il est vide si v n'est pas une fonction). On définit cell par cas comme suit si c est un chemin :

- $\mathrm{cell}(s, v, c, e_p) = \cup_{s' \text{ après } s} \mathrm{cell}_0(s', v, c, e_p)$. Ceci est utile pour assurer que si on estime l'échappement dans un état donné, l'analyse restera correcte dans un état futur (par exemple, quand on utilisera l'expression analysée).
- Si $c = \bot$ ou $v \in \{\mathrm{true}, \mathrm{false}, \mathrm{NIL}\} \cup \mathbb{Z}$, $\mathrm{cell}_0(s, v, c, []) = \emptyset$.
- Si $c = \top$,

$$\mathrm{cell}_0(s, \ell, c, []) = \ell\downarrow_s \ - a(s) \tag{2.1}$$

  Ceci représente l'ensemble des cellules dénotées par ℓ dans l'état s, à ceci près qu'on retire $a(s)$ pour compenser l'effet des constructions impératives.

- Si $c = \mathrm{g}.c_1$, $s(\ell) = (\ell_1, \ell_2)$ (couples ou listes) ou $s(\ell) = \ell_1$ (références),

$$\mathrm{cell}_0(s, \ell, c, e_p) = \mathrm{cell}(s, \ell_1, c_1, e_p) \tag{2.2}$$

  De même si $c = \mathrm{d}.c_2$.

- si $c = \mathrm{app}.c_1$, $s(\ell) = (m, e', x)$, $m(e'[x \mapsto p_1])s = \mathrm{up}(\ell'', s')$:

$$\mathrm{cell}_0(s, \ell, c, (s, p_1) : e_p) = (a(s, s') \cup \mathrm{cell}(s', \ell'', c_1, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \tag{2.3}$$

  Si l'état s ne correspond pas à celui indiqué pour le paramètre p_1 dans l'environnement de paramètres, le résultat est $\emptyset$.

- si $c = \mathrm{app}.c_1$, $s(\ell) = (m, e', x)$, et $m(e'[x \mapsto p_1])s = \bot$: $\mathrm{cell}_0(s, \ell, c, (s', p_1) : e_p) = \emptyset$
- si le chemin demandé ne correspond pas à la donnée (le chemin commence par d pour une référence, par g ou d pour une fermeture, par app pour autre chose qu'une fermeture), le résultat est $\emptyset$.

Si c est un ensemble de chemins, on fait simplement l'union :

$$\mathrm{cell}(s, \ell, c, e_p) = \cup\{\mathrm{cell}(s, \ell, c_1, e_p) | c_1 \in c\}$$

Intuitivement, on descend dans les niveaux de deux façons différentes : pour des structures de données, on suit simplement les pointeurs, tandis que pour des fonctions, on leur applique un paramètre pris dans l'environnement de paramètres. On arrête la descente quand le chemin est $\top$ ou $\bot$.

Lemme 2.6 *Si s' est après s dans la trace d'exécution,* $\mathrm{cell}(s', v, c, e_p) \subseteq \mathrm{cell}(s, v, c, e_p)$.

Preuve : Évident :

$$\begin{aligned}\mathrm{cell}(s', v, c, e_p) &= \cup_{s'' \text{ après } s'} \mathrm{cell}_0(s'', v, c, e_p)\\ &\subseteq \cup_{s'' \text{ après } s} \mathrm{cell}_0(s'', v, c, e_p)\\ &\subseteq \mathrm{cell}(s, v, c, e_p)\end{aligned}$$

□

Lemme 2.7 *Si $[\![M]\!]es = \mathrm{up}(\ell, s')$, $(a(s, s') \cup \ell \downarrow_{s'}) \cap \mathrm{loc}(s) \subseteq e \downarrow_s$. Ceci exprime que seules les cellules accessibles depuis l'environnement peuvent être accédées.*

Preuve : En observant la sémantique, on peut remarquer que toutes les cellules qui apparaissent dans un calcul sont celles rendues par $e[\![x]\!]$ où $x \in Var$, $s(l)$ où ℓ est une cellule et $\mathrm{newloc}(s, x)$. Toutes ces cellules sont donc dans $L(e, s) = e \downarrow_s \cup (Loc - \mathrm{loc}(s))$. Mais cet ensemble de cellules ne dépend que de e et s, et les seules opérations qui modifient e ou s sont $e' = e[x \mapsto \ell]$, $s' = s[\ell \mapsto v]$ ($\mathrm{up}(\ell, s') = \mathrm{newloc}(s, v)$ est un cas particulier du précédent) où $\ell \in L(e, s)$, $v \in V(e, s) \cup V(e, s) \times V(e, s) \cup (Env \to Exp) \times \{e_{|E}\} \times Var$ et $V(e, s) = L(e, s) \cup \{\mathrm{NIL}, \mathrm{true}, \mathrm{false}\} \cup \mathbb{Z}$. Alors $L(e', s') \subset L(e, s)$. Donc toutes les cellules qui apparaissent sont dans $L(e, s)$ ce qui est le résultat voulu. □

Lemme 2.8 $\mathrm{cell}(s, v, c, e_p) \subseteq v \downarrow_s \cup \mathrm{loc}(e_p) - a(s)$ *et de même pour* cell_0.

Preuve : Par récurrence sur c.

–

$$\begin{aligned}\mathrm{cell}(s, v, c, e_p) &= \cup_{s'} \mathrm{cell}_0(s', v, c, e_p)\\ &\subseteq \cup_{s'} v \downarrow_{s'} \cup \mathrm{loc}(e_p) - a(s') \text{ par hypothèse sur } \mathrm{cell}_0\\ &\subseteq v \downarrow_s \cup \mathrm{loc}(e_p) - a(s)\end{aligned}$$

car, si une cellule est dans $v \downarrow_{s'}$, mais pas dans $v \downarrow_s$, elle a été stockée (dans v) entre les états s et s', donc $v \downarrow_{s'} - a(s') \subseteq v \downarrow_s - a(s)$.

– Le seul autre cas non trivial est celui de l'application :

$$\begin{aligned}\mathrm{cell}_0(s, \ell, \mathrm{app}.c, (s, p_1) : e_p) &= (a(s, s') \cup \mathrm{cell}(s', \ell'', c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p)\\ &\subseteq (a(s, s') \cup (\ell'' \downarrow_{s'} \cup \mathrm{loc}(e_p) - a(s'))) \cap \mathrm{loc}(s, e_p)\\ &\quad \text{par hypothèse de récurrence sur } c\\ &\subseteq (e[x \mapsto p_1]) \downarrow_s \cup \mathrm{loc}(e_p) - a(s)\\ &\quad \text{par le lemme 2.7}\\ &\subseteq \ell \downarrow_s \cup \mathrm{loc}((s, p_1) : e_p) - a(s)\end{aligned}$$

□

Lemme 2.9 *Si c ne commence pas par une application et v n'est pas mutable, ou bien si c ne contient pas d'application, l'union sur s' est inutile et* $\mathrm{cell} = \mathrm{cell}_0$. *En particulier,* $\mathrm{cell}(s, v, \top, []) = v \downarrow_s - a(s)$

Preuve :

– Si $c = \top$,

$$\mathrm{cell}(s, v, \top, []) = \cup_{s' \text{ après } s} v \downarrow_{s'} - a(s')$$

Or, si une cellule est dans $v \downarrow_{s'}$, mais pas dans $v \downarrow_s$, elle a été stockée (dans v) entre les états s et s', donc $v \downarrow_{s'} - a(s') \subseteq v \downarrow_s - a(s)$, ce qui donne le résultat voulu.

- Si $c = \bot$, $\text{cell}(s, v, \bot, []) = \cup_{s' \text{ après } s} \emptyset = \emptyset$.
- Si $c = \text{g}.c'$, si $s'(v) = (\ell, \ell')$ ou $s'(v) = \ell$, $\text{cell}(s, v, \text{g}.c', e_p) = \cup_{s' \text{ après } s} \text{cell}(s', \ell, c', e_p) = \text{cell}(s, \ell, c', e_p)$ d'après le lemme 2.6. Si v n'a pas été modifiée entre s et s', $s(v) = s'(v) = (\ell, \ell')$ ou ℓ, donc on a le résultat voulu. Si c ne contient pas d'application, et que v a été modifiée entre s et s', $\text{cell}(s', \ell, c', e_p) \subseteq \ell \downarrow_{s'} - a(s') = \emptyset$ (lemme 2.8).

□

Définition 2.10 Soit $\text{dest} : (\mathit{Store} \times \mathit{Val}) \times \mathit{Ctx} \to \mathcal{P}(\mathit{Loc})$ définie par

$$\text{dest}((s, v), c) = \cup_{e_p \in Env_p} \text{cell}(s, v, c, e_p) - \text{loc}(e_p)$$

Remarque: Si v est non-fonctionnelle, la soustraction des cellules de e_p et l'union sur e_p sont inutiles (car e_p est toujours vide).

Lemme 2.11 $\text{dest}((s, v), c) \subseteq v \downarrow_s$

Preuve : Le résultat se déduit immédiatement du lemme 2.8. □

Lemme 2.12 $\text{dest}((s, v), a) \cup \text{dest}((s, v), b) = \text{dest}((s, v), a \sqcup b)$

Preuve : Ceci résulte immédiatement de la définition de cell sur un ensemble de chemins comme union des valeurs de cell sur chaque chemin. □

Théorème 2.13 *Considérons une instance d'une variable x dans une construction de la forme :* `let` x `=` M `in` N *ou* `let rec` $x(y)$ `=` M `in` N. *Soit s_x l'état au début de l'évaluation de M, s'_x l'état à la fin de l'évaluation de N et r le résultat de l'expression N. Supposons que la cellule ℓ au sommet de x soit nouvelle au moment de la définition de x. Si $\ell \notin (a(s_x, s'_x) \cup \text{cell}(s'_x, r, \top, [])) \cap \text{loc}(s_x) = (a(s_x, s'_x) \cup r \downarrow_{s'_x}) \cap \text{loc}(s_x) - a(s_x)$, alors ℓ est allouable en pile.*

Preuve : En effet, dans ce cas, ℓ n'est accessible que par l'intermédiaire de x dans l'état s'_x : $\ell \notin a(s_x)$ et $\ell \in \text{loc}(s_x)$ donc, $\ell \notin a(s_x, s'_x) \cup r \downarrow_{s'_x}$. ℓ n'est pas accessible par le résultat r car $\ell \notin r \downarrow_{s'_x}$, et ℓ n'est pas accessible par les autres variables de l'environnement car elle n'a pas subi d'affectation. Quand on supprime x, ℓ n'est donc plus accessible et peut être libérée. □

Définition 2.14 (Correction) On définit la correction en plusieurs étapes :

- **Pour une valeur v :** ϕ est une abstraction correcte de la sémantique d'une valeur v dans l'environnement e si

$$\begin{aligned} &\text{corr}_v : \mathit{Env} \times \mathit{Store} \times \mathit{Val} \times \mathit{Val}^\# \to \{\text{vrai}, \text{faux}\} \\ &\text{corr}_v(e, s, v, \phi) \Leftrightarrow \forall c \in \mathit{Ctx}, \forall e_p \in \mathit{Env}_p, \\ &\quad \text{cell}(s, v, c, e_p) \subseteq \cup_{x \in \text{Dom}(e)} \text{dest}(e(x), \phi x) \cup \cup_{i \in \mathit{Ind}} \text{dest}(e_p(i), \phi i) \end{aligned} \tag{2.4}$$

  où $e(x)$ est un couple (état au moment de la définition de x, valeur de x). Ceci est une sorte de sémantique instrumentée où on a remplacé $e[x \mapsto \ell]$ par $e[x \mapsto (s, \ell)]$ pour mémoriser aussi l'état au moment de la création de la variable.

- **Pour une expression M :** ϕ est une abstraction correcte de la sémantique $f = [\![M]\!]$ d'un terme M dans l'environnement e si

$$\begin{aligned} &\text{corr}_e : \mathit{Env} \times \mathit{Store} \times \mathit{Exp} \times \mathit{Exp}^\# \to \{\text{vrai}, \text{faux}\} \\ &\text{corr}_e(e, s, f, \phi) \Leftrightarrow \forall c \in \mathit{Ctx}, \forall e_p \in \mathit{Env}_p, A \subseteq \cup_{x \in \text{Dom}(e)} \text{dest}(e(x), \phi x) \cup \cup_{i \in \mathit{Ind}} \text{dest}(e_p(i), \phi i) \end{aligned} \tag{2.5}$$

  $A = \emptyset$ si $f\ s = \bot$

$A = (a(s,s') \cup \text{cell}(s',v,c,e_p)) \cap \text{loc}(s,e_p)$ si $f\ s = \text{up}(v,s')$.

Intuitivement, on marque la partie A du résultat réprésentée par le contexte c et les cellules stockées, qui sont considérées comme s'échappant, et on cherche les cellules marquées dans les variables et paramètres.

- On dit qu'une fonction $f \in \mathit{Val}^\# = \mathit{Exp}^\#$ est ρ-transitive si $fcx \sqcup \rho[\![y]\!] \bot x \supseteq \rho[\![y]\!](fcy)x$ si y est dans la portée lexicale de x. Ceci exprime que f tient compte des échappements qui se produisent par des déclarations de variables intermédiaires. Par exemple, dans l'expression `let x =` M `in let y =` N `in` P, si $f = E[\![P]\!]\rho$ est l'analyse de P, et si on garde la partie représentée par le contexte c du résultat, l'échappement de `y` sera représenté par $c_1 = fc\mathtt{y}$, cet échappement va causer l'échappement $c_2 = \rho[\![\mathtt{y}]\!]c_1\mathtt{x}$ de `x`. D'autre part, ce qui s'échappe de `x` est ce qui s'échappe à travers des affectations pendant l'évaluation de N, $\rho[\![\mathtt{y}]\!]\bot\mathtt{x}$, union ce qui s'échappe par le résultat, $fc\mathtt{x}$. La ρ transitivité affirme que cet échappement prend en compte l'échappement c_2 à travers `y`.
- **Pour l'analyse entière:** L'analyse est correcte si elle donne des résultats corrects quand on lui passe un environnement correct, c'est-à-dire si :

$$\begin{aligned}&\text{corr} : (\mathit{Env} \to \mathit{Exp}) \times (\mathit{Env}^\# \to \mathit{Exp}^\#) \to \{\text{vrai}, \text{faux}\}\\ &\text{corr}(f,\phi) \Leftrightarrow \forall s, \forall e \in \mathit{Env}, \forall \rho \in \mathit{Env}^\#, \forall y \in \text{Dom}(e), \text{corr}_v(e,s,e[\![y]\!],\rho[\![y]\!]) \text{ et } \rho[\![y]\!] \text{ est}\\ &\quad \rho\text{-transitive } \Rightarrow \text{corr}_e(e,s,fe,\phi\rho) \text{ et } \phi\rho \text{ est } \rho\text{-transitive}\end{aligned} \tag{2.6}$$

où $\phi\rho c$ est définie sur $\text{Dom}(e) \cup \mathit{Ind}$. Le but sera de montrer que $\text{corr}([\![M]\!], E[\![M]\!])$.

Exemple 2.15 Par exemple,

```
let x = (true :: []) :: [] in
let y = hd x in
  y
```

Soient e et s l'environnement e et l'état lors de l'évaluation de `y`. Soient x_1 et $x_2 = y$ les cellules telles que $e[\![\mathtt{x}]\!] = x_1$, $e[\![\mathtt{y}]\!] = y$, $s(x_1) = (x_2, \text{NIL})$, $s(x_2) = \text{true}, \text{NIL})$. On cherche $\phi\top\mathtt{x}$ pour que $\text{corr}_v(e,s,y,\phi)$.

$\text{cell}(s,y,\top,[]) = \{x_2\}$, $\text{dest}((s,x_1),\text{g}.\top) = \{x_2\}$ et $\text{dest}((s,x_1),\text{g.g}.\top) = \emptyset$ donc $\phi\top\mathtt{x} = \text{g}.\top$.

Définition 2.16 (Concrétisation) On peut se placer dans le cadre de la structure de concrétisation de [CC92].

On utilise comme treillis concret $\mathcal{P}(\mathit{Exp})$ muni de l'inclusion, et comme treillis abstrait $\mathit{Exp}^\#$ muni de l'ordre $\sqsubseteq$ point par point sur les fonctions.

On étend alors la relation de correction corr au treillis concret par $\text{corr}(e,\phi) \Leftrightarrow \forall f \in e, \text{corr}(f,\phi)$.

On définit la fonction de concrétisation :

$$\begin{aligned}&\gamma : \mathit{Exp}^\# \to \mathcal{P}(\mathit{Exp})\\ &\gamma(\phi) = \{f \mid \text{corr}(f,\phi)\}\end{aligned} \tag{2.7}$$

autrement dit $\gamma(\phi)$ est le plus grand élément correct du treillis concret.

γ est croissante et $\gamma(\lambda cx.\mathit{Chem}) = \mathit{Exp}$.

Définition 2.17 (Complétude (forte)) L'analyse est complète si elle est la plus petite qui soit correcte, c'est-à-dire :

$$\text{corr}([\![M]\!],\phi) \Rightarrow E[\![M]\!] \sqsubseteq \phi \tag{2.8}$$

ou encore

$$[\![M]\!] \in \gamma(\phi) \Rightarrow E[\![M]\!] \sqsubseteq \phi \tag{2.9}$$

Ceci est une définition très forte de la complétude, qui n'est pas réalisée ici pour trois raisons :

- Le `if` : dans l'expression `if true then [] else x`, l'analyse dit que `x` peut s'échapper ce qui ne sera en fait jamais le cas.
- Les fonctions d'ordre supérieur : dans l'expression `map (fun x -> []) l`, l'analyse ne trouve pas que les éléments de `l` ne s'échappent pas.
- Les fonctions stockées dans des structures de données : dans `(hd [fun x -> true]) z`, `z` ne s'échappe pas, mais l'analyse ne le trouve pas. On a un problème analogue avec : `( ! (ref (fun x -> true))) z`, mais ici il est encore plus délicat car une affectation intermédiaire peut changer la fonction stockée dans la référence.

Remarque: L'existence d'un plus petit élément à l'ensemble des contextes corrects n'est pas évidente. Par exemple, si on a un couple $x = (a, a)$, et que a s'échappe, g.$\top$ et d.$\top$ sont deux éléments minimaux incomparables de l'ensemble des contextes corrects. Cependant, si on regarde l'expression qui utilise x, pour une valeur de x différente de (a, a), on saura quelle partie du couple s'échappe effectivement. En particulier, le plus petit élément existe quand il n'y a initialement aucun alias (plusieurs chemins menant à la même cellule). La difficulté est de se convaincre que l'échappement décrit dans ce cas particulier convient aussi dans le cas général. C'est pourquoi on n'a pas défini d'abstraction $\alpha : \mathcal{P}(Exp) \to Exp^{\#}$.

Définition 2.18 (Complétude) L'analyse est complète si elle est la plus petite qui soit correcte et compositionnelle (c'est-à-dire que l'analyse d'une expression dépend de l'analyse des sous-expressions, mais pas des sous-expressions elles-mêmes). Considérons une construction du langage $M = C(M_1, ..., M_n)$. Sa sémantique est $[\![M]\!] = f_C([\![M_1]\!], ..., [\![M_n]\!])$ et l'analyse correspondante est $E[\![M]\!] = \phi_C(E[\![M_1]\!], ..., E[\![M_n]\!])$

$$\begin{array}{l}(\forall M_i, \mathrm{corr}(f_C([\![M_1]\!], ..., [\![M_n]\!])], \phi(E[\![M_1]\!], ..., E[\![M_n]\!])))\\ \quad \Rightarrow \forall M_i, \phi_C(E[\![M_1]\!], ..., E[\![M_n]\!]) \sqsubseteq \phi(E[\![M_1]\!], ..., E[\![M_n]\!])\end{array} \tag{2.10}$$

ou dans la formulation avec concrétisation, ϕ_C est correcte vis à vis de f_C si et seulement si $\gamma \circ f_C \sqsubseteq \phi_C \circ (\gamma, ..., \gamma)$. La complétude exprime que ϕ_C est minimale pour cette propriété, c'est-à-dire : $\gamma \circ f_C \sqsubseteq \phi \circ (\gamma, ..., \gamma) \Rightarrow \phi_C \sqsubseteq \phi$.

On note $f = \{x \mapsto f(x), ...\}$ une fonction $f : (Var \cup Ind) \to Ctx$ définie point par point. f vaut $\bot$ aux points où elle n'est pas explicitement définie. $\{\}$ désigne donc la fonction constante égale à $\bot$.

Définition 2.19 On définit l'analyse E sur la figure 2.3 : La valeur $\rho[\![y]\!]$ associée à une variable libre y d'une expression M d'un programme $P = C[M]$ pour l'analyse $E[\![M]\!]\rho$ est celle qu'elle prend dans l'analyse de P au moment où on évalue $E[\![M]\!]$. La correction de cette valeur est prouvée pour pouvoir appliquer l'hypothèse d'induction à M. Par exemple, $\rho[\![y]\!] = \rho_\top$ si y est définie par `fun` $y \to M$

On définit E pour des ensembles de chemins par additivité :

$$E[\![M]\!]\rho c x = \cup\{E[\![M]\!]\rho c' x | c' \in c\}$$

On peut remarquer que, comme les restrictions des contextes sont les extensions par additivité des restrictions des chemins, la plupart des formules données pour des chemins se prolongent sans changement aux contextes. Seules les formules qui distinguent plusieurs cas suivant le chemin c doivent être adaptées en effectuant une borne supérieure sur tous les cas qui se trouvent dans le contexte.

Exemple 2.20 Considérons l'exemple suivant qui utilise la fonction `map` :

```
let l =
   let a = 1 :: 2 :: 3 :: [] in
   let g = fun x -> x+1 in
```

$E[\![M]\!] : Env^\# \to Exp^\#$
$E[\![y]\!]\rho c = \rho[\![y]\!]c$
$E[\![M\ N]\!]\rho c = \{i \mapsto \phi(i+1) \text{ si } i \in Ind, x \mapsto \phi(x) \sqcup \psi(x) \text{ si } x \in Var\}$
où $\phi = E[\![M]\!]\rho(\text{app}.c)$ et $\psi = E[\![N]\!]\rho(\phi(1))$

$$E[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho c = \begin{cases} \bigsqcup_{z \in FV(\texttt{fun}\ y \to M)} \rho[\![z]\!]\top & \text{si } c = \top, \\ \bot & \text{si } c = \bot, \\ \{1 \mapsto \phi(y), i \mapsto \phi(i-1) \text{ si } i > 1, x \mapsto \phi(x) \text{ si } x \in Var\ \} & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $\phi = E[\![M]\!]\rho[y \mapsto \rho_\top](c_{|\to})_{|\overline{\{y\}}}$ et $\rho_\top(c) = \{i \mapsto \top, y \mapsto c\}$.
$E[\![\texttt{let}\ y = M\ \texttt{in}\ N]\!]\rho c = E[\![N]\!]\rho[y \mapsto E[\![M]\!]\rho \sqcup \lambda c.\{y \mapsto c\}]c_{|\overline{\{y\}}} \sqcup E[\![M]\!]\rho\bot_{|\,Var}$
$E[\![\texttt{let rec}\ f(y) = M\ \texttt{in}\ N]\!]\rho c = E[\![N]\!](\text{lfp}(\lambda\rho_1.\rho[f \mapsto E[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_1 \sqcup \lambda c.\{f \mapsto c\}])c_{|\overline{\{f\}}}$
$E[\![\texttt{if}\ M\ \texttt{then}\ N\ \texttt{else}\ P]\!]\rho c = E[\![M]\!]\rho\bot_{|\,Var} \sqcup E[\![N]\!]\rho c \sqcup E[\![P]\!]\rho c$
$E[\![M::N]\!]\rho c = E[\![M]\!]\rho(c_{|g}) \sqcup E[\![N]\!]\rho(c_{|d})$
$E[\![(M,N)]\!]\rho c = E[\![M]\!]\rho(c_{|g}) \sqcup E[\![N]\!]\rho(c_{|d})$
$E[\![M;N]\!]\rho c = E[\![M]\!]\rho\bot_{|\,Var} \sqcup E[\![N]\!]\rho c$

$$\rho[\![\texttt{ref}]\!]c = \begin{cases} \{\} & \text{si } c = \bot \text{ ou } \top, \\ \{1 \mapsto c_{|\to|g}, i \mapsto \top \text{ si } i > 1\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\rho[\![:=]\!]c = \begin{cases} \{\} & \text{si } c = \bot, \text{app}.\bot \text{ ou } \top \\ \{1 \mapsto \top\} & \text{si } c = \text{app}.\top, \\ \{1 \mapsto \bot, 2 \mapsto \top\} & \text{si } c = \text{app.app}.\bot \text{ ou app.app}.\top. \end{cases}$$

$\rho[\![a]\!]c = \{\}$ où $a \in \{\texttt{true}, \texttt{false}, []\} \cup \mathbb{Z}$

$$\rho[\![\texttt{hd}]\!]c = \begin{cases} \{\} & \text{si } c = \bot \text{ ou } \top, \\ \{1 \mapsto \text{g}.c_{|\to}, i \mapsto \top \text{ si } i > 1\} & \text{sinon.} \end{cases}$$ De même pour `fst` et `!`.

$$\rho[\![\texttt{tl}]\!]c = \begin{cases} \{\} & \text{si } c = \bot \text{ ou } \top, \\ \{1 \mapsto \text{d}.c_{|\to}, i \mapsto \top \text{ si } i > 1\} & \text{sinon.} \end{cases}$$ De même pour `snd`.

$\rho[\![\texttt{null}]\!]c = \{\}$

FIG. 2.3 – *Analyse E*

```
   let rec map f l =
      if null l
      then []
      else (f (hd l)) :: (map f (tl l))
   in map g a
in ...
```

Soit M l'expression `let rec map = ... in map g a`. Soit ρ_0 l'environnement qui ne contient que les variables prédefinies.

$$\rho = \rho_0[\mathtt{a} \mapsto (E[\![\mathtt{1::2::3::[]}]\!]\rho_0 \sqcup \lambda c.\{\mathtt{a} \mapsto c\}), \mathtt{g} \mapsto (E[\![\mathtt{fun\ x\ ->\ x+1}]\!]\rho_0 \sqcup \lambda c.\{\mathtt{g} \mapsto c\})]$$

$$E[\![M]\!]\rho c = E[\![\mathtt{map\ g\ a}]\!](\mathrm{lfp}(\lambda\rho_1.\rho[\mathtt{map} \mapsto E[\![\mathtt{fun\ f\ l\ ->\ if\ ...}]\!]\rho_1 \sqcup \lambda c.\{\mathtt{map} \mapsto c\}]))c$$

avec

$$\begin{aligned}
E[\![\mathtt{fun\ f\ l\ ->\ if\ ...}]\!]\rho_1 c1 &= E[\![\mathtt{fun\ l\ ->\ if\ ...}]\!]\rho_1[\mathtt{f} \mapsto \rho_\top](c_{|\to})\mathtt{f} \\
&= E[\![\mathtt{if...}]\!]\rho_1[\mathtt{f} \mapsto \rho_\top, \mathtt{l} \mapsto \rho_\top](c_{|\to|\to})\mathtt{f} \\
&= E[\![\mathtt{null\ l}]\!]\rho_2 \bot \mathtt{f} \sqcup E[\![\mathtt{[]}]\!]\rho_2(c_{|\to|\to})\mathtt{f} \\
&\quad \sqcup E[\![\mathtt{(f\ (hd\ l))::(map\ f\ (tl\ l))}]\!]\rho_2(c_{|\to|\to})\mathtt{f} \\
&= \emptyset \sqcup \emptyset \sqcup E[\![\mathtt{(f\ (hd\ l))}]\!]\rho_2(c_{|\to|\to|g})\mathtt{f} \sqcup E[\![\mathtt{(map\ f\ (tl\ l))}]\!]\rho_2(c_{|\to|\to|d})\mathtt{f} \\
&= E[\![\mathtt{f}]\!]\rho_2(\mathrm{app}.c_{|\to|\to|g})\mathtt{f} \sqcup E[\![\mathtt{hd\ l}]\!]\rho_2(E[\![\mathtt{f}]\!]\rho_2((\mathrm{app}.c_{|\to|\to|g})1)\mathtt{f} \\
&\quad \sqcup E[\![\mathtt{map}]\!]\rho_2 c'\mathtt{f} \sqcup E[\![\mathtt{f}]\!]\rho_2(E[\![\mathtt{map}]\!]\rho_2 c'1)\mathtt{f} \sqcup E[\![\mathtt{hd\ l}]\!]\rho_2(E[\![\mathtt{map}]\!]\rho_2 c'2)\mathtt{f} \\
&= (\mathrm{app}.c_{|\to|\to|g}) \sqcup \emptyset \sqcup \rho_2[\![\mathtt{map}]\!]c'\mathtt{f} \sqcup \rho_2[\![\mathtt{f}]\!](\rho_2[\![\mathtt{map}]\!]c'1)\mathtt{f} \sqcup \emptyset \\
&= (\mathrm{app}.c_{|\to|\to|g}) \sqcup \rho_2[\![\mathtt{map}]\!]c'\mathtt{f} \sqcup \rho_2[\![\mathtt{map}]\!]c'1
\end{aligned}$$

où $\rho_2 = \rho_1[\mathtt{f} \mapsto \rho_\top, \mathtt{l} \mapsto \rho_\top]$ et $c' = \mathrm{app.app}.c_{|\to|\to|d}$. De même,

$$\begin{aligned}
E[\![\mathtt{fun\ f\ l\ ->\ if\ ...}]\!]\rho_1 c2 &= E[\![\mathtt{if...}]\!]\rho_2(c_{|\to|\to})\mathtt{l} \\
&= E[\![\mathtt{null}]\!]\rho_2 \bot 1 \sqcup E[\![\mathtt{[]}]\!]\rho_2(c_{|\to|\to})\mathtt{l} \sqcup (E[\![\mathtt{f\ (hd\ l)}]\!]\rho_2(c_{|\to|\to|g})\mathtt{l} \\
&\quad \sqcup E[\![\mathtt{map\ f\ (tl\ l)}]\!]\rho_2(c_{|\to|\to|d})\mathtt{l} \\
&= E[\![\mathtt{hd\ l}]\!]\rho_2(E[\![\mathtt{f}]\!]\rho_2(\mathrm{app}.c_{|\to|\to|g})1)\mathtt{l} \sqcup E[\![\mathtt{map}]\!]\rho_2 c\mathtt{l} \\
&\quad \sqcup E[\![\mathtt{tl\ l}]\!]\rho_2(E[\![\mathtt{map}]\!]\rho_2 c'2)\mathtt{l} \\
&= E[\![\mathtt{hd\ l}]\!]\rho_2 \top \mathtt{l} \sqcup \rho_2[\![\mathtt{map}]\!]c'\mathtt{l} \sqcup E[\![\mathtt{tl\ l}]\!]\rho_2(\rho_2[\![\mathtt{map}]\!]c2)\mathtt{l} \\
&= \{\mathrm{g}.\top\} \sqcup \rho_2[\![\mathtt{map}]\!]c'\mathtt{l} \sqcup \mathrm{d}.\rho_2[\![\mathtt{map}]\!]c'2
\end{aligned}$$

On a aussi : $E[\![\mathtt{fun\ f\ l\ ->\ if\ ...}]\!]\rho_1 c\mathtt{map} = c' \sqcup \rho_2[\![\mathtt{map}]\!]c'\mathtt{map}$ et $E[\![\mathtt{fun\ f\ l\ ->\ if\ ...}]\!]\rho_1 cx = \emptyset$ si $x \in \mathit{Var} - \{\mathtt{map}\}$. Un calcul de point fixe montre alors que

$$\rho_1[\![\mathtt{map}]\!]c = \{\mathtt{map} \mapsto c, 1 \mapsto \mathrm{app}.c_{|\to|\to|d^*|g}, 2 \mapsto \mathrm{d}^*.\mathrm{g}.\top\}$$

(d^* désigne l'ensemble des mots constitués d'un nombre quelconque de d) donc

$$E[\![M]\!]\rho\{\top\}\mathtt{a} = \rho_1[\![\mathtt{map}]\!]\{\mathrm{app.app}.\top\}2 = \mathrm{d}^*.\mathrm{g}.\top$$

et

$$E[\![M]\!]\rho\{\top\}\mathtt{g} = \rho_1[\![\mathtt{map}]\!]\{\mathrm{app.app}.\top\}1 = \{\mathrm{app}.\top\}$$

donc on peut mettre le sommet de `a` et la fermeture `g` en pile (ici, on peut aussi mettre `map` en pile mais dans un vrai programme, `map` est une fonction de bibliothèque et donc une déclaration globale qui n'est jamais mise en pile).

Lemme 2.21 *Si $\forall y, \rho[\![y]\!]$ est ρ-transitive, $E[\![M]\!]\rho$ aussi.*

Preuve : Par induction sur M :

- Cas y : par hypothèse sur ρ.
- Cas $M\ N$: si x est une variable,

$$\begin{aligned} E[\![M\ N]\!]\rho cx \sqcup \rho[\![y]\!]\bot x &= E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)x \sqcup E[\![N]\!]\rho(E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)1)x \sqcup \rho[\![y]\!]\bot x \\ &\supseteq \rho[\![y]\!](E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)y)x \sqcup \rho[\![y]\!](E[\![N]\!]\rho(E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)1)y)x \\ &\quad \text{par hypothèse de récurrence sur } M \text{ et sur } N \\ &\supseteq \rho[\![y]\!](E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)y \sqcup E[\![N]\!]\rho(E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)1)y)x \\ &\supseteq \rho[\![y]\!](E[\![M\ N]\!]\rho cy)x \end{aligned}$$

- Cas $\mathtt{fun}\ y \to M$: Montrons tout d'abord que $\rho_\top$ est ρ-transitive. En effet, $\rho[\![z]\!](\rho_\top cz)x \subseteq \rho_\top cx \sqcup \rho[\![z]\!]\bot x$ car si $z \neq y$, $\rho_\top cz = \bot$ donc on a le résultat et si $z = y$, $\rho[\![z]\!] = \rho_\top$ et $\rho_\top cz = c$ donc on a encore le résultat.

  Alors

$$\begin{aligned} E[\![\mathtt{fun}\ y \to M]\!]\rho cx \sqcup \rho[\![z]\!]\bot x &= E[\![M]\!]\rho[y \mapsto \rho_\top](c_{|\to})x \sqcup \rho[\![z]\!]\bot x \\ &\supseteq \rho[\![z]\!](E[\![M]\!]\rho[y \mapsto \rho_\top](c_{|\to})z)x \text{ par hypothèse de récurrence sur } M \\ &\supseteq \rho[\![z]\!](E[\![\mathtt{fun}\ y \to M]\!]\rho cz)x \end{aligned}$$

- Les autres cas se traitent de manière analogue.

□

Lemme 2.22 $\mathrm{corr}_v(e, s, v, \phi) \Rightarrow \mathrm{corr}_v(e, s', v, \phi)$ *si s' est après s dans la trace d'exécution.*

Preuve : Par le lemme 2.6, $\mathrm{cell}(s', v, c, e_p) \subseteq \mathrm{cell}(s, v, c, e_p)$. Ceci donne l'implication voulue sur corr_v en utilisant la définition de corr_v. □

Théorème 2.23 *L'analyse E est correcte, et e est cohérent avec ρ sur les variables prédéfinies :* $\mathrm{corr}_v(e, s, e[\![y]\!], \rho[\![y]\!])$.

Preuve : On fait évidemment la preuve par induction sur la syntaxe et par cas. J'omets de traiter les cas de non terminaison, qui sont évidents : rien ne s'échappe dans ces cas-là.

On fait la démonstration dans le cas où c est un chemin, on en déduit la correction dans le cas où c est un contexte :

$$\begin{aligned} (a(s, s') \cup \mathrm{cell}(s', \ell, c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) &= (a(s, s') \cup \cup_{c' \in c} \mathrm{cell}(s', \ell, c', e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \\ &= \cup_{c' \in c}(a(s, s') \cup \mathrm{cell}(s', \ell, c', e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \text{ car } c \neq \emptyset \text{ puisque } \bot \in c \\ &\subseteq \cup_{c' \in c} \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!]\rho c'x) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![M]\!]\rho c'i) \\ &\subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!]\rho cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![M]\!]\rho ci) \end{aligned}$$

- Cas y :

$$[\![y]\!]es = \mathrm{up}(e[\![y]\!], s)$$

$$\begin{aligned} A &= (a(s, s) \cup \mathrm{cell}(s, e[\![y]\!], c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \\ &\subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), \rho[\![y]\!]cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), \rho[\![y]\!]ci) \text{ d'après (2.4)} \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{corr}_e(e, s, [\![y]\!], \rho[\![y]\!])$$

– Cas $M\ N$:

$$\begin{aligned}[\![M\ N]\!]es &= \text{let } [(f',s')] = [\![M]\!]es \text{ in } \text{let } [(v,s'')] = [\![N]\!]es' \text{ in}\\ &\quad \text{let } (m,e',y) = s'(f') \text{ in } m(e'[y\mapsto v])s''\\ &= \mathrm{up}(l,s''')\end{aligned}$$

$$A = (a(s,s''') \cup \mathrm{cell}(s''',\ell,c,e_p)) \cap \mathrm{loc}(s,e_p)$$

D'après le lemme 2.4,

$$\begin{aligned}A &= (\mathrm{cell}(s''',\ell,c,e_p) \cup a(s,s') \cup a(s',s'') \cap a(s'',s''')) \cap \mathrm{loc}(s,e_p)\\ &= (\mathrm{cell}(s'',f',\mathrm{app}.c,(s'',v):e_p) \cup a(s,s') \cup a(s',s'')) \cap \mathrm{loc}(s,e_p) \text{ d'après (2.3)}\\ &\subseteq \cup_{x\in\mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x),E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)x) \cup \cup_{i>1} \mathrm{dest}(e_p(i-1),E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)i) \cup (a(s',s'')\\ &\quad \cup \mathrm{dest}((s'',v),E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)1)) \cap \mathrm{loc}(s') \text{ par hypothèse de récurrence sur } M\\ &\subseteq \cup_{x\in\mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x),E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)x) \cup \cup_{i>1} \mathrm{dest}(e_p(i-1),E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)i)\\ &\quad \cup \cup_{x\in\mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x),E[\![N]\!]\rho(E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)1)x)\end{aligned}$$

car $(a(s',s'')\cup\mathrm{cell}(s'',v,c',e_p))\cap\mathrm{loc}(s',e_p) \subseteq \cup_{x\in\mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x),E[\![N]\!]\rho c'x)\cup\cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i),E[\![N]\!]\rho c'i)$ par hypothèse de récurrence sur N, donc

$$(a(s',s'') \cup \mathrm{dest}((s'',v),c')) \cap \mathrm{loc}(s') \subseteq \cup_{x\in\mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x),E[\![N]\!]\rho c'x)$$

Alors, comme $\mathrm{dest}(e(x),c)$ croît en c,

$$\mathrm{corr}_e(e,s,[\![M\ N]\!],\lambda c.\lambda x.\begin{cases}E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)x \sqcup E[\![N]\!]\rho(E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)1)x & \text{si } x\in Var\\ E[\![M]\!]\rho(\mathrm{app}.c)(x+1) & \text{si } x\in Ind\end{cases})$$

– Cas $\mathtt{fun}\ y\to M$:

$$[\![\mathtt{fun}\ y\to M]\!]es = \mathrm{newloc}(s,([\![M]\!],e_{|FV(\mathtt{fun}\ y\to M)},y)) = \mathrm{up}(\ell,s')$$

Si $c=\bot$:

$$A = a(s,s') \cup \mathrm{cell}(s',\ell,\bot,[]) = \emptyset$$

Si $c=\top$:

$$\begin{aligned}A &= (a(s,s') \cup \mathrm{cell}(s',\ell,\top,[])) \cap \mathrm{loc}(s)\\ &= \ell\downarrow_{s'} \cap \mathrm{loc}(s) - a(s') \text{ d'après le lemme 2.9}\\ &= \bigcup_{z\in FV(\mathtt{fun}\ y\to M)} z\downarrow_s - a(s)\\ &= \bigcup_{z\in FV(\mathtt{fun}\ y\to M)} \mathrm{cell}(s,z,\top,[])\\ &\subseteq \bigcup_{z\in FV(\mathtt{fun}\ y\to M)} \cup_{x\in\mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x),\rho[\![z]\!]\top x) \text{ par cohérence de } \rho\end{aligned}$$

Sinon :

$$\begin{aligned}A &= (a(s,s') \cup \mathrm{cell}(s',\ell,c,(s'',p_1):e_p)) \cap \mathrm{loc}(s,(s'',p_1):e_p)\\ &\subseteq (a(s'',s''') \cup \mathrm{cell}(s''',\ell'',c_{|\to},e_p)) \cap \mathrm{loc}(s'',e_p) \text{ d'après (2.3)}\end{aligned}$$

où $s''(\ell) = ([\![M]\!],e_{|FV(\mathtt{fun}\ y\to M)},y)$ et $[\![M]\!](e_{|FV(\mathtt{fun}\ y\to M)}[y\mapsto p_1])s'' = \mathrm{up}(\ell'',s''')$. On a la cohérence entre p_1 et $\rho_\top$: en effet,

$$\begin{aligned}\mathrm{cell}(s'',p_1,c,e_p) &\subseteq \mathrm{cell}(s'',p_1,c,e_p) - \mathrm{loc}(e_p) \cup \cup_{i,e_p(i)=(s_p,v_p)} v_p\downarrow_{s_p}\\ &\subseteq \mathrm{dest}((s'',p_1),c) \cup \cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i),\top)\end{aligned}$$

donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à M

$$A \subseteq \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!](\rho[y \mapsto \rho_\top])(c_{|\to})x) \cup \mathrm{dest}((s'', p_1), E[\![M]\!](\rho[y \mapsto \rho_\top])(c_{|\to})y) \\ \cup \cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![M]\!](\rho[y \mapsto \rho_\top])(c_{|\to})i)$$

donc

$$\mathrm{corr}_e(e, s, [\![\texttt{fun } y \to M]\!], \lambda c.\lambda x. \begin{cases} \bigsqcup_{z\in FV(\texttt{fun } y\to M)} \rho[\![z]\!]\top x & \text{si } c = \top, \\ \bot & \text{si } c = \bot, \\ E[\![M]\!](\rho[y \mapsto \rho_\top])(c_{|\to})x & \text{sinon, si } x \in Var.) \\ E[\![M]\!](\rho[y \mapsto \rho_\top])(c_{|\to})y & \text{sinon, si } x = 1. \\ E[\![M]\!](\rho[y \mapsto \rho_\top])(c_{|\to})(x-1) & \text{sinon, si } x > 1. \end{cases}$$

– Cas $\texttt{let } y = M \texttt{ in } N$:

$$[\![\texttt{let } y = M \texttt{ in } N]\!]es = \text{let } [(v, s')] = [\![M]\!]es \text{ in } [\![N]\!](e[y \mapsto v])s' = \mathrm{up}(\ell'', s'')$$

$$\begin{aligned} A &= (a(s, s'') \cup \mathrm{cell}(s'', \ell'', c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \\ &= (a(s, s') \cup a(s', s'') \cup \mathrm{cell}(s'', \ell'', c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \text{ d'après le lemme 2.4} \\ &\subseteq (a(s, s') \cap \mathrm{loc}(s)) \cup (a(s', s'') \cup \mathrm{cell}(s'', \ell'', c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s', e_p) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \\ &\subseteq \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!]\rho\bot x) \cup \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e')} \mathrm{dest}(e'(x), E[\![N]\!]\rho' cx) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \\ &\quad \cup \cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![N]\!]\rho' ci) \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence appliquée à M et à N, avec $\rho' = \rho[y \mapsto E[\![M]\!]\rho \sqcup \lambda c.\{y \mapsto c\}]$ et $e' = e[y \mapsto v]$. En effet, montrons que l'environnement ρ' utilisé pour l'analyse de N est correct, c'est-à-dire $\mathrm{corr}_v(e', s', e'[\![y]\!], \rho'[\![y]\!])$: $\mathrm{cell}(s', v, c, e_p) \subseteq \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!]\rho cx) \cup \cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![M]\!]\rho ci)$ par hypothèse de récurrence sur M donc

$$\begin{aligned} \mathrm{cell}(s', v, c, e_p) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) &\subseteq (a(s, s') \cup \mathrm{cell}(s', v, c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \\ &\subseteq \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!]\rho cx) \cup \cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![M]\!]\rho ci) \end{aligned}$$

et $\mathrm{cell}(s', v, c, e_p) - \mathrm{loc}(e_p) \subseteq \mathrm{dest}((s', v), c)$ donc

$$\mathrm{cell}(s', v, c, e_p) \subseteq \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!]\rho cx) \cup \mathrm{dest}((s', v), c) \cup \cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![M]\!]\rho ci)$$

Ceci permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence à N.

Le terme en $x = y$ est majoré par ρ-transitivité :

$$\begin{aligned} \mathrm{dest}(e'(y), c') \cap \mathrm{loc}(s, e_p) &= \mathrm{dest}((s', v), c') \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \\ &\subseteq \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!]\rho c'x) \text{ par correction de } E[\![M]\!] \\ &= \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), \rho'[\![y]\!]c'x) \\ &\subseteq \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![N]\!]\rho' cx \sqcup \rho'[\![y]\!]\bot x) \text{ par } \rho\text{-transitivité.} \\ &\subseteq \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![N]\!]\rho' cx \sqcup E[\![M]\!]\rho\bot x) \end{aligned}$$

Alors, comme $\mathrm{dest}(e(x), c)$ croît en c (lemme 2.12),

$$\mathrm{corr}_e(e, s, [\![\texttt{let } y = M \texttt{ in } N]\!], \lambda c.E[\![N]\!](\rho[y \mapsto E[\![M]\!]\rho \sqcup \lambda c.\{y \mapsto c\}])c \sqcup E[\![M]\!]\rho\bot)$$

– Cas $\texttt{let rec}\ f(y) = M\ \texttt{in}\ N$:

$$[\![\texttt{let rec}\ f(x) = M\ \texttt{in}\ N]\!]es = [\![N]\!](e[f \mapsto (s', \ell)])s'$$

où $\ell \notin \mathrm{Dom}(s)$, $s' = s[\ell \mapsto (\phi, e_{|FV(\texttt{fun}\ x \to M)}, x)]$ et $\phi = \mathrm{lfp}(\lambda\phi_1.\lambda e_1.\lambda s_1.[\![M]\!](e_1[f \mapsto (s_1', \ell)])s_1')$ où s_1' est l'état s_1 où $s_1(\ell)$ a été remplacé par (ϕ_1, e_1, x).

Soit $\rho_2 = \mathrm{lfp}(\lambda\rho_1.\rho[f \mapsto E[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_1 \sqcup \lambda c.\{f \mapsto c\}])$.

On effectue une induction de point fixe, en considérant des exécutions fictives dans lesquelles on arrête le calcul de point fixe à la n^{e} itération, puis en passant à la limite :

– Cas initial : $f_1^0 = \bot$, $s^0 = s[\ell \mapsto (f_1^0, e, y)]$, $\rho_2^0 = \rho[f \mapsto \lambda c.\{f \mapsto c\}]$ alors

$$\mathrm{cell}(s^0, \ell, c, e_p') \subseteq \mathrm{dest}((s', \ell), c) = \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e_1)} \mathrm{dest}(e_1(x), \rho_2^0[\![f]\!]cx)$$

où $e_1 = e[f \mapsto \ell]$.

– Induction : on montre par récurrence que

$$\mathrm{cell}(s^n, \ell, c, e_p') \subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e_1)} \mathrm{dest}(e_1(x), \rho_2^n[\![f]\!]cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p'(i), \rho_2^n[\![f]\!]ci)$$

où $f_1^{n+1} = \lambda e_1.\lambda s.[\![M]\!](e_1[f \mapsto \ell])s^n$, $s^{n+1} = s[\ell \mapsto (f_1^{n+1}, e, y)]$, $\rho_2^{n+1} = \rho[f \mapsto E[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_2^n \sqcup \lambda c.\{f \mapsto c\}]$. En effet, l'hypothèse de récurrence donne la cohérence entre $s^n(\ell)$ et $\rho_2^n[\![f]\!]$ en utilisant la formule (2.4), ce qui permet d'appliquer l'hypothèse d'induction sur l'expression à $\texttt{fun}\ y \to M$ et on obtient alors :

$$\begin{aligned}(a(s, s^{n+1}) \cup \mathrm{cell}(s^{n+1}, \ell, c, e_p')) \cap \mathrm{loc}(s, e_p') \subseteq\ & \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e_1)} \mathrm{dest}(e_1(x), E[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_2^n cx) \\ & \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p'(i), E[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_2^n ci)\end{aligned}$$

en notant que $\rho_2^{n+1}[\![f]\!] = E[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_2^n \sqcup \lambda c.\{f \mapsto c\}$,

$$\mathrm{cell}(s^{n+1}, \ell, c, e_p') \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e_1)} \mathrm{dest}(e_1(x), \rho_2^{n+1}[\![f]\!]cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p'(i), \rho_2^{n+1}[\![f]\!]ci)$$

et $\mathrm{cell}(s^{n+1}, \ell, c, e_p') - \mathrm{loc}(e_p) \subseteq \mathrm{dest}((s', \ell), c) \subseteq \mathrm{dest}(e_1(f), \rho_2^{n+1}[\![f]\!]c)$ donc

$$\mathrm{cell}(s^{n+1}, \ell, c, e_p') \subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e_1)} \mathrm{dest}(e_1(x), \rho_2^{n+1}[\![f]\!]cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p'(i), \rho_2^{n+1}[\![f]\!]ci)$$

– Passage à la limite :

$$\begin{aligned}\mathrm{cell}(s', \ell, c, e_p') &= \cup_n \mathrm{cell}(s^n, \ell, c, e_p') \\ &\subseteq \cup_n \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e_1)} \mathrm{dest}(e_1(x), \rho_2^n[\![f]\!]cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p'(i), \rho_2^n[\![f]\!]ci) \\ &\subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e_1)} \mathrm{dest}(e_1(x), \sqcup_n \rho_2^n[\![f]\!]cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p'(i), \sqcup_n \rho_2^n[\![f]\!]ci)\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.12

$$\subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e_1)} \mathrm{dest}(e_1(x), \rho_2[\![f]\!]cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p'(i), \rho_2[\![f]\!]ci)$$

On obtient donc la cohérence entre ℓ et $\rho_2[\![f]\!]$ (2.4), donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence sur N.

$$\begin{aligned}A &= (a(s, s'') \cup \mathrm{cell}(s'', \ell', c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \\ &= (a(s', s'') \cup \mathrm{cell}(s'', \ell', c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s', e_p) \\ &\subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e_1)} \mathrm{dest}(e_1(x), E[\![N]\!]\rho_2 cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![N]\!]\rho_2 ci)\end{aligned}$$

car on ne considère pas comme des affectations les modifications effectuées sur la fermeture entre les états s et s'. Comme dans le cas `let`, le terme en $x = f$ est majoré par ρ-transitivité :

$$\begin{aligned}\mathrm{dest}(e_1(f), c') &= \mathrm{dest}((s', \ell), c') \\ &\subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), \rho_2[\![f]\!]c'x) \\ &\subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![N]\!]\rho_2 cx \sqcup \rho_2[\![f]\!]\bot x) \text{ par } \rho\text{-transitivité.} \\ &\subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![N]\!]\rho_2 cx)\end{aligned}$$

Alors $A \subseteq \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![N]\!]\rho_2 cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![N]\!]\rho_2 ci)$ donc

$$\mathrm{corr}_e(e, s, [\![\texttt{let rec } f(y) = M \texttt{ in } N]\!], \lambda c.E[\![N]\!]((\mathrm{lfp}(\lambda\rho_1.\rho[f \mapsto E[\![\texttt{fun } y \to M]\!]\rho_1 \sqcup \lambda c.\{f \mapsto c\}]))c)$$

– Cas `if` M `then` N `else` P :

$$\begin{aligned}[\![\texttt{if } M \texttt{ then } N \texttt{ else } P]\!]es &= \text{let } [(x, s')] = [\![M]\!]es \text{ in if } x \text{ then } [\![N]\!]es' \text{ else } [\![P]\!]es' \\ &= \mathrm{up}(\ell'', s'')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= (a(s, s'') \cup \mathrm{cell}(s'', \ell'', c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \\ &\subseteq (\mathrm{cell}(s'', \ell'', c, e_p) \cup a(s, s') \cup a(s', s'')) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \text{ d'après le lemme 2.4} \\ &\subseteq [\cup_{x \in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![N]\!]\rho cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![N]\!]\rho ci) \\ &\quad \cup \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![P]\!]\rho cx) \cup \cup_{i \in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![P]\!]\rho ci)] \cup \cup_{x \in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!]\rho\bot x)\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence appliquée à M, N et P

Comme $\mathrm{dest}((s, v), c)$ croît en c (lemme 2.12),

$$\mathrm{corr}_e(e, s, [\![\texttt{if } M \texttt{ then } N \texttt{ else } P]\!], \lambda c.E[\![M]\!]\rho\bot \sqcup E[\![N]\!]\rho c \sqcup E[\![P]\!]\rho c)$$

– Cas $M :: N$:

$$\begin{aligned}[\![M :: N]\!]es &= \text{let } [(h, s')] = [\![M]\!]es \text{ in let } [(t, s'')] = [\![N]\!]es' \text{ in } \mathrm{newloc}(s'', (h, t)) \\ &= \mathrm{up}(\ell, s''')\end{aligned}$$

$$A = (a(s, s''') \cup \mathrm{cell}(s''', \ell, c, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p)$$

On distingue alors deux cas :

– Si $c = \top$, $\mathrm{cell}(s''', \ell, \top, []) \cap \mathrm{loc}(s) = (\ell \cup h \downarrow_{s'''} \cup t \downarrow_{s'''}) \cap \mathrm{loc}(s)$. Comme ℓ est une nouvelle cellule, $\ell \notin \mathrm{loc}(s)$, donc

$$\mathrm{cell}(s''', \ell, c, e_p) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) = (\mathrm{cell}(s''', h, c_{|g}, e_p) \cup \mathrm{cell}(s''', t, c_{|d}, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p).$$

– Si $c = \mathrm{g}.c_1$, par définition de cell (2.2),

$$\begin{aligned}\mathrm{cell}(s''', \ell, c, e_p) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) &= \cup_{s_4 \text{ après } s'''} \mathrm{cell}(s_4, h, c_1, e_p) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) \\ &= (\mathrm{cell}(s''', h, c_{|g}, e_p) \cup \mathrm{cell}(s''', t, c_{|d}, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p)\end{aligned}$$

car cell décroît au cours de l'exécution (lemme 2.6) et $\mathrm{cell}(s''', t, c_{|d}, e_p) = \emptyset$. On traite de même le cas $c = \mathrm{d}.c_1$.

– Le cas $c = \bot$ est évident :

$$\mathrm{cell}(s''', \ell, c, e_p) \cap \mathrm{loc}(s, e_p) = \emptyset = (\mathrm{cell}(s''', h, c_{|g}, e_p) \cup \mathrm{cell}(s''', t, c_{|d}, e_p)) \cap \mathrm{loc}(s, e_p).$$

En appliquant de plus le lemme 2.4,

$$\begin{aligned}A &\subseteq (a(s,s') \cup a(s',s'') \cup a(s'',s''') \\ &\quad \cup \mathrm{cell}(s''',h,c_{|g},e_p) \cup \mathrm{cell}(s''',t,c_{|d},e_p)) \cap \mathrm{loc}(s,e_p) \\ &\subseteq (a(s,s') \cup \mathrm{cell}(s',h,c_{|g},e_p)) \cap \mathrm{loc}(s,e_p) \cup (a(s',s'') \cup \mathrm{cell}(s'',t,c_{|d},e_p)) \cap \mathrm{loc}(s',e_p) \\ &\subseteq \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!]\rho(c_{|g})x) \cup \cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![M]\!]\rho(c_{|g})i) \\ &\quad \cup \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![N]\!]\rho(c_{|d})x) \cup \cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![N]\!]\rho(c_{|d})i)\end{aligned}$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence sur M et N et le lemme 2.6, donc

$$\mathrm{corr}_e(e,s,[\![M::N]\!], \lambda c. E[\![M]\!]\rho(c_{|g}) \sqcup E[\![N]\!]\rho(c_{|d}))$$

– Cas (M,N) : analogue à $M::N$.

– Cas $M;N$:

$$[\![M;N]\!]es = \text{let } [(l,s')] = [\![M]\!]es \text{ in } [\![N]\!]es' = \mathrm{up}(\ell',s'')$$

$$\begin{aligned}A &= (a(s,s'') \cup \mathrm{cell}(s'',\ell',c,e_p)) \cap \mathrm{loc}(s,e_p) \\ &\subseteq (a(s,s') \cup a(s',s'') \cup \mathrm{cell}(s'',\ell',c,e_p)) \cap \mathrm{loc}(s,e_p) \text{ d'après le lemme 2.4} \\ &\subseteq \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![M]\!]\rho\bot x) \cup \cup_{x\in \mathrm{Dom}(e)} \mathrm{dest}(e(x), E[\![N]\!]\rho c x) \cup \cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i), E[\![N]\!]\rho c i)\end{aligned}$$

par récurrence sur M et N, donc en utilisant encore le lemme 2.12,

$$\mathrm{corr}_e(e,s,[\![M;N]\!], \lambda c. E[\![M]\!]\rho\bot \sqcup E[\![N]\!]\rho c)$$

– Cas `ref` :

$$e[\![\texttt{ref}]\!] = \mathrm{ref} \text{ où } s(\mathrm{ref}) = (\lambda e.\lambda s'.\, \mathrm{newloc}(s', e[\![x]\!]), \emptyset, x)$$

– Cas $c = \top$ ou $c = \bot$:

$$\mathrm{cell}(s,\mathrm{ref},\bot,[]) = \emptyset$$
$$\mathrm{cell}(s,\mathrm{ref},\top,[]) = \{\mathrm{ref}\} = \mathrm{dest}((s,\mathrm{ref}),\top)$$

– Cas $c = \mathrm{app}.c'$: Soit $\mathrm{newloc}(s', e[\![x]\!]) = \mathrm{up}(\ell, s'')$

$$\begin{aligned}A &= \mathrm{cell}(s,\mathrm{ref},c,(s',p_1) : e_p) \\ &\subseteq a(s',s'') \cup \mathrm{cell}(s'',\ell,c',e_p) \text{ d'après (2.3)} \\ &\subseteq \mathrm{cell}(s'',\ell,c',e_p) \\ &\subseteq \cup_{s''' \text{ après } s''} \mathrm{cell}_0(s''',r',c'_{|g},e_p)\end{aligned}$$

car ℓ étant mutable, $p_1 = s''(\ell)$ peut-être remplacé par $r' = s'''(\ell)$ dans un état futur s'''. Si $r' \neq p_1$, d'après le lemme 2.8,

$$\mathrm{cell}_0(s''',r',c'_{|g},e_p) \subseteq \mathrm{loc}(e_p) \cup r' \downarrow_{s'''} - a(s''')$$

$r' \downarrow_{s'''} \subseteq a(s''')$ donc

$$\mathrm{cell}_0(s''',r',c'_{|g},e_p) \subseteq \mathrm{loc}(e_p)$$

Finalement, $A \subseteq \mathrm{cell}(s''',p_1,c'_{|g},e_p) \cup \mathrm{loc}(e_p)$
$A \subseteq \mathrm{dest}((s'',p_1),c'_{|g}) \cup \cup_{i\in Ind} \mathrm{dest}(e_p(i),\top)$

Alors

$$\mathrm{corr}_v(e,s,\mathrm{ref},\lambda c. \begin{cases}\{\} & \text{si } c = \bot \text{ ou } \top, \\ \{1 \mapsto c_{|\to|g}, i \mapsto \top \text{ si } i > 1\} & \text{sinon.}\end{cases})$$

– Cas ! :

$$e[\![!]\!] = \text{deref où } s(\text{deref}) = (\lambda e.\lambda s'.\,\text{up}(s'(e[\![x]\!]), s'), \emptyset, x)$$

– Cas $c = \top$ ou $c = \bot$:

$$\text{cell}(s, \text{deref}, \top, []) = \{\text{deref}\} = \text{dest}((s, \text{deref}), \top)$$

$$\text{cell}(s, \text{deref}, \bot, []) = \emptyset$$

– Cas $c = \text{app}.c'$:

$$\begin{aligned} A &= \text{cell}(s, \text{deref}, c, (s', p_1) : e_p) \\ &\subseteq \text{cell}(s', s'(p_1), c', e_p) \text{ d'après (2.3)} \\ &\subseteq \text{cell}(s', p_1, \text{g}.c', e_p) \\ &\subseteq \text{dest}((s', p_1), \text{g}.c') \cup \cup_{i \in Ind}\, \text{dest}(e_p(i), \top) \end{aligned}$$

Alors,

$$\text{corr}_v(e, s, \text{deref}, \lambda c. \begin{cases} \{\} & \text{si } c = \bot \text{ ou } \top, \\ \{1 \mapsto \text{g}.c_{|\to}, i \mapsto \top \text{ si } i > 1\} & \text{sinon.} \end{cases})$$

– Cas $:=$:

$e[\![:=]\!] = \text{affect où } s(\text{affect}) = (\lambda e.\lambda s'.\,\text{newloc}(s', (\lambda e'.\lambda s''.\,\text{up}(\text{NIL}, s''[e'[\![m]\!] \mapsto e'[\![n]\!]]), e, n)), \emptyset, m)$

– Cas $c = \bot$ ou $c = \top$:

$$\text{cell}(s, \text{affect}, \top, []) = \{\text{affect}\} = \text{dest}((s, \text{affect}), \top)$$

$$\text{cell}(s, \text{affect}, \bot, []) = \emptyset$$

– Cas $c = \text{app}.\bot$: $\text{cell}(s, \text{affect}, \text{app}.\bot, [(s', p_1)]) \subseteq \text{cell}(s'', \ell, \bot, []) \cup a(s', s'')$ d'après (2.3), où $\text{newloc}(s', (\lambda e'.\lambda s''.\,\text{up}((), s''[e'[\![m]\!] \mapsto e'[\![n]\!]]), e, n)) = \text{up}(\ell, s'')$. Alors

$$\text{cell}(s, \text{affect}, c, [(s', p_1)]) = \emptyset.$$

– Cas $c = \text{app}.\top$ avec les mêmes notations que pour $c = \text{app}.\bot$:

$$\begin{aligned} A &= \text{cell}(s, \text{affect}, \text{app}.\top, [(s', p_1)]) \\ &\subseteq \text{cell}(s'', \ell, \top, []) \cup a(s', s'') \text{ d'après (2.3)} \\ &\subseteq a(s', s'') \cup \ell \downarrow_{s''} - a(s'') \\ &\subseteq p_1 \downarrow_{s'} - a(s') \\ &\subseteq \text{dest}((s', p_1), \top) \end{aligned}$$

– Cas $c = \text{app.app}.c'$:

$A = \text{cell}(s, \text{affect}, c, [(s', p_1), (s''', p_2)])$

En appliquant 2 fois (2.3),

$$\begin{aligned} A &\subseteq \text{cell}(s'''', \text{NIL}, c', []) \cup a(s', s'') \cup a(s''', s'''') \\ &\subseteq a(s''', s'''') \\ &\subseteq p_2 \downarrow_{s'''} - a(s''') \\ &\subseteq \text{dest}((s''', p_2), \top) \end{aligned}$$

Alors,

$$\mathrm{corr}_v(e,s,\mathrm{affect},\lambda c.\begin{cases}\{\} & \text{si } c=\bot,\mathrm{app}.\bot \text{ ou } \top\\ \{1\mapsto\top\} & \text{si } c=\mathrm{app}.\top,\\ \{1\mapsto\bot,2\mapsto\top\} & \text{si } c=\mathrm{app.app}.\bot \text{ ou } \mathrm{app.app}.\top.\end{cases})$$

- Cas `true` : $e[\![\texttt{true}]\!] = \mathrm{true}$ et $\mathrm{cell}(s,\mathrm{true},c,[]) = \emptyset$ donc $\mathrm{corr}_v(e,s,\mathrm{true},\lambda c.\bot)$
- Cas `false`, $\mathbb{Z}$ et `[]` : comme `true`.
- Cas `hd`, `tl`, `null`, `fst` et `snd` : analogues à `!`.

□

Dans le cas :

```
let rec f(x) = ... z := f ...
in f(3)
```

$\mathrm{dest}((s,\mathtt{f}),\mathrm{app}.\top)$ comprend toutes les cellules de `f`, donc on ne peut pas utiliser directement le critère $\mathrm{corr}_e(e,s,[\![\mathtt{f(3)}]\!],E[\![\mathtt{f(3)}]\!]\rho)$ pour décider que `f` ne s'échappe pas si $\top \notin E[\![\mathtt{f(3)}]\!]\rho\top\mathtt{f}$.

Le même problème se produit quand on autorise des structures récursives définies par `let rec` : la cellule du sommet peut fort bien être accédée par l'intermédiaire d'un chemin différent de $\top$.

On peut cependant prouver le résultat suivant.

Théorème 2.24 (Correction de l'analyse E) *Considérons l'expression:* `let` x `=` M `in` N *ou* `let rec` $x(y)$ `=` M `in` N. *Soit ℓ la cellule au sommet de x. Supposons que la création de cette cellule soit la dernière opération de M. Supposons que $\top \notin E[\![N]\!]\rho\, Chem\, x$. Alors ℓ est allouable en pile.*

Preuve : Soit s_x l'état avant évaluation de N, et s'_x l'état après évaluation de N.

Si x est défini par `let`, $\mathrm{dest}((s_x,\ell),c) \subseteq \cup_{e_p}(a(s_1,s'_1)\cup\cdots\cup a(s_n,s'_n)\cup r'\downarrow_{s'_n} - \mathrm{loc}(e_p))$ où s_i est l'état du i^{e} paramètre de e_p, s'_i est l'état après application de ce paramètre à la valeur courante, et r' est le résultat de la descente dans x par le chemin c. Les affectations ne peuvent concerner que des cellules accessibles pendant le calcul des applications, c'est-à-dire des paramètres passés ou des cellules contenues dans l'environnement des fermetures éventuellement contenues dans x, et donc pas la cellule ℓ, donc $\ell \notin a(s_x,s'_n) - \mathrm{loc}(e_p)$. D'autre part, si $c\neq\top$, $\ell \notin r'\downarrow_{s'}$, donc finalement, si $c\neq\top$, $\ell \notin \mathrm{dest}((s_x,\ell),c)$.

Si x est défini par un `let rec`, x lui-même peut faire référence à ℓ. Par ρ-transitivité (lemme 2.21), $E[\![N]\!]\rho\, Chem\, x \sqcup \rho[\![x]\!]\bot x \supseteq \rho[\![x]\!](E[\![N]\!]\rho\, Chem\, x)x$ avec $\rho[\![x]\!] = \mathrm{lfp}(\lambda\rho_x.E[\![\mathtt{fun}\ y\to M]\!]\rho[x\mapsto\rho_x]\sqcup\lambda c.\{x\mapsto c\})$. Alors $\rho[\![x]\!]\bot x = \bot$, donc $\top\notin\rho[\![x]\!](E[\![N]\!]\rho\, Chem\, x)x$. Soit $c\in E[\![N]\!]\rho\, Chem\, x$. $\top\notin\rho[\![x]\!]cx$, donc $\top\notin\mathrm{lfp}(\lambda\rho_x.E[\![\mathtt{fun}\ y\to M]\!]\rho[x\mapsto\rho_x]\sqcup\lambda c.\{x\mapsto c\})cx$.

De façon analogue à la preuve de correction dans le cas `let rec`, considérons des exécutions fictives où on ne fait que n itérations dans le calcul du point fixe, pour montrer par induction que $\ell\notin\mathrm{dest}((s^n_x,\ell),c)$, si $c\neq\top$.

- Si $n=0$, x est la fonction qui ne termine jamais, donc rien ne s'échappe : $\mathrm{dest}((s^0_x,\ell),c)=\emptyset$ car $c\neq\top$.
- Pour $n+1$,

$$\begin{aligned}\mathrm{dest}((s^{n+1}_x,\ell),c) \subseteq{}& \cup_{z\in Var-\{x\}}\mathrm{dest}(e^n(z),E[\![\mathtt{fun}\ y\to M]\!]\rho^n cz)\\ &\cup\mathrm{dest}(e^n(x),E[\![\mathtt{fun}\ y\to M]\!]\rho^n cx\sqcup c)\end{aligned}$$

par correction de l'analyse pour le terme $\mathtt{fun}\ y\to M$ (ceci se déduit de l'étape d'induction effectuée dans la preuve de correction de `let rec`). Par hypothèse de récurrence, comme $\top\notin E[\![\mathtt{fun}\ y\to M]\!]\rho^n cx\sqcup c$, $\ell\notin\mathrm{dest}((s^n_x,\ell),E[\![\mathtt{fun}\ y\to M]\!]\rho^n cx\sqcup c)$, et ℓ n'est pas dans les autres variables de l'environnement, car elle est créée au moment de la création de x, donc $\ell\notin\mathrm{dest}((s^{n+1}_x,\ell),c)$.

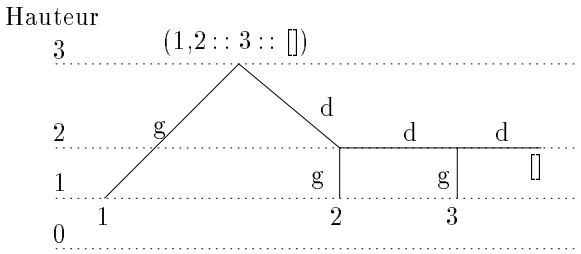


FIG. 2.4 – *Hauteurs de types*

– Passage à la limite : $\mathrm{dest}((s_x,\ell),c) = \cup_n \mathrm{dest}((s_x^n,\ell),c)$, donc $\ell \notin \mathrm{dest}((s_x,\ell),c)$.

On a donc ici encore : $\ell \notin \mathrm{dest}((s_x,\ell),c)$ si $c \in E[\![N]\!]\rho\ Chem\, x$.

Alors $\ell \notin \mathrm{dest}((s_x,\ell), E[\![N]\!]\rho\ Chem\, x)$. Soit r le résultat de N. Par correction de l'analyse (théorème 2.23), $(a(s_x,s'_x) \cup \mathrm{cell}(s'_x,r,\top,[])) \cap \mathrm{loc}(s_x) \subseteq \cup_{x \in Var} \mathrm{dest}(e(x), E[\![N]\!]\rho\ Chem\, x)$. Alors $\ell \notin a(s_x,s'_x) \cup r\downarrow_{s'_x}$, car $\ell \in \mathrm{loc}(s_x)$ et ℓ n'est pas dans les variables autres que x, car elle est créée avec x, donc $\ell \notin (a(s_x,s'_x) \cup \mathrm{cell}(s'_x,r,\top,[])) \cap \mathrm{loc}(s_x)$ d'après le théorème 2.13, ℓ est allouable en pile.

□

Cette analyse est évidemment invariante par polymorphisme car les types n'interviennent pas dans sa définition [Abr86].

2.4 Deuxième version plus approchée

L'analyse précédente est précise, mais sa complexité est trop importante pour permettre une implémentation efficace. On fait donc davantage d'approximations.

On définit les hauteurs de types par

$$\begin{aligned}
&\top_2[\tau] = 1 \text{ si } \tau = \texttt{bool}, \texttt{int} \text{ ou } \texttt{unit}.\\
&\top_2[\tau_1 \to \tau_2] = \top_2[\tau_2]\\
&\top_2[\tau_1 * \tau_2] = 1 + \max(\top_2[\tau_1], \top_2[\tau_2])\\
&\top_2[\tau\ \texttt{list}] = 1 + \top_2[\tau]\\
&\top_2[\tau\ \texttt{ref}] = 1 + \top_2[\tau]
\end{aligned}$$

et par $\top_1[\tau] = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \text{ est contient un type fonctionnel } \tau_1 \to \tau_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La hauteur d'un chemin est alors définie par

$$\begin{aligned}
&\alpha_2^\tau(\top) = \top_2[\tau] \text{ si } \tau \text{ n'est pas fonctionnel, et } \infty \text{ sinon.}\\
&\alpha_2^\tau(\bot) = 0\\
&\alpha_2^{\tau_1\to\tau_2}(\mathrm{app}.c) = \alpha_2^{\tau_2}(c)\\
&\alpha_2^{\tau_1*\tau_2}(\mathrm{g}.c) = \alpha_2^{\tau_1}(c), \alpha_2^{\tau\ \texttt{list}}(\mathrm{g}.c) = \alpha_2^{\tau}(c), \alpha_2^{\tau\ \texttt{ref}}(\mathrm{g}.c) = \alpha_2^{\tau}(c)\\
&\alpha_2^{\tau_1*\tau_2}(\mathrm{d}.c) = \alpha_2^{\tau_2}(c), \alpha_2^{\tau\ \texttt{list}}(\mathrm{d}.c) = \alpha_2^{\tau\ \texttt{list}}(c)\\
&\alpha_2^{\tau}(c) = 0 \text{ dans tous les autres cas (chemins interdits).}
\end{aligned}$$

On définit la hauteur d'un contexte par passage à la borne supérieure :

$$\alpha_2^\tau(c) = \bigsqcup_{c' \in c} \alpha_2^\tau(c')$$

et la fonction de concrétisation

$$\gamma_2^\tau(c') = \{c | \alpha_2^\tau(c) \le c'\}$$

α_2^τ et γ_2^τ forment une correspondance de Galois :

$$(Ctx, \subseteq) \underset{\alpha_2^\tau}{\overset{\gamma_2^\tau}{\rightleftarrows}} (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$$

$$\alpha_2^\tau(x) \leq y \Leftrightarrow x \subseteq \gamma_2^\tau(y)$$

et

$$\alpha_2^\tau \circ \gamma_2^\tau = id$$

On notera souvent en exposant de α_2 ou de γ_2 une expression à la place d'un type pour signifier le type de cette expression.

Soit $Ctx_1 = \{0, 1\}$ et $Ctx_2 = \mathbb{N}$. On définit l'abstraction $\alpha_1^\tau(c) = (1, 0)$ si $\alpha_2^\tau(c) = \infty$, $\alpha_1^\tau(c) = (0, \alpha_2^\tau(c))$ sinon. $\gamma_1^\tau(c_1, c_2) = \sqcup\{c \in Ctx | \alpha_1(c) \leq (c_1, c_2)\}$ où l'ordre sur les couples est lexicographique. $(\alpha_1^\tau, \gamma_1^\tau)$ est une correspondance de Galois :

$$(Ctx, \subseteq) \underset{\alpha_1^\tau}{\overset{\gamma_1^\tau}{\rightleftarrows}} (Ctx_1 \times Ctx_2, \leq)$$

$Val_i = Ctx_i \to (Var \cup Ind) \to Ctx_i$ et $Env_i = Var \to Val_i$. On définit deux analyses approchées $F_i[\![M]\!] : Env_i \to Val_i$ sur la figure 2.5 Dans ces définitions, $x \in Var$ et $i \in Ind$. Ceci permet de distinguer facilement ce qui se passe pour les paramètres de ce qui concerne les variables. Soit $\top_{1x} = \top_1[\tau]$ si x est de type τ. On notera $\top_{1,x}$ pour plus de clarté quand x est un indice de paramètre numérique. On utilise les mêmes notations pour $\top_2$.

L'analyse F_1 prend en compte les variables qui s'échappent à travers des fermetures, alors que F_2 donne une information plus précise pour les autres variables. Une seule analyse n'est pas suffisante, car le niveau d'une varaible dans une fermeture peut être plus grand que le niveau de la fermeture, donc la fonction d'échappement correspondante ne serait pas inférieure et notre algorithme rapide ne fonctionnerait pas (voir section 3.3).

Exemple 2.25 Pour la fonction `map: (int ->int) ->int list ->int list` (exemple 2.20),

$F_1[\![\texttt{fun f l -> if ...}]\!]\rho_1 c =$
$\{1 \mapsto c \sqcup \rho_1[\![\texttt{map}]\!]c\,\texttt{f} \sqcup \rho_1[\![\texttt{map}]\!]c\,1, 2 \mapsto c \sqcup \rho_1[\![\texttt{map}]\!]c\,\texttt{l} \sqcup \rho_1[\![\texttt{map}]\!]c\,2, \texttt{map} \mapsto c \sqcup \rho_1[\![\texttt{map}]\!]c\,\texttt{map}\}$
$F_2[\![\texttt{fun f l -> if ...}]\!]\rho_2 c =$
$\{1 \mapsto (c \sqcap 1) \sqcup \rho_2[\![\texttt{map}]\!]c\,\texttt{f} \sqcup \rho_2[\![\texttt{map}]\!]c\,1, 2 \mapsto 1 \sqcup \rho_2[\![\texttt{map}]\!]c\,\texttt{l} \sqcup \rho_2[\![\texttt{map}]\!]c\,2, \texttt{map} \mapsto c \sqcup \rho_2[\![\texttt{map}]\!]c\,\texttt{map}\}$

On peut alors calculer les points fixes :

$$\rho_1[\![\texttt{map}]\!]c = \{\texttt{map} \mapsto c, 1 \mapsto c, 2 \mapsto c\}$$
$$\rho_2[\![\texttt{map}]\!]c = \{\texttt{map} \mapsto c, 1 \mapsto c \sqcap 1, 2 \mapsto 1\}$$

Lemme 2.26 *Si x est une variable, $F_1[\![M]\!]\rho_1 1x \geq \sqcup_{z \in FV(M)} \rho_1[\![z]\!]1x$*

Preuve : Par induction sur M. Le point clé est de noter que dans la définition de $F_1[\![M]\!]\rho_1 cx$, la valeur du contexte passée à une sous-expression de M est au moins c, donc ici c'est 1. □

On pourrait montrer que

$$\alpha_1(E[\![M]\!]\rho\gamma_1(c_1, c_2)x) \leq (F_1[\![M]\!]\rho_1 c_1 x, F_2[\![M]\!]\rho_2 c_2 x)$$

si

$$\alpha_1(\rho[\![y]\!]\gamma_1(c_1, c_2)x) \leq (\rho_1[\![y]\!]c_1 x, \rho_2[\![y]\!]c_2 x)$$

mais le lemme 2.26 donne une propriété plus forte quand $F_1[\![M]\!]\rho_1 1x = 0 : x$ n'est pas libre dans M. On peut alors montrer le théorème de correction suivant :

$F_1[\![M]\!] : Env_1 \to Val_1$
$F_1[\![y]\!]\rho_1 c = \rho_1[\![y]\!]c$
$F_1[\![M\ N]\!]\rho_1 c = \{i \mapsto \phi(i+1), x \mapsto \phi(x) \sqcup \psi(x)\}$ avec $\phi = F_1[\![M]\!]\rho_1 c$ et $\psi = F_1[\![N]\!]\rho_1(\phi(1) \sqcup c)$.
$F_1[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_1 c = \{1 \mapsto \phi(y), i \mapsto \phi(i-1)$ si $i > 1, x \mapsto \phi(x)\}$
où $\phi = F_1[\![M]\!]\rho_1[y \mapsto \rho_{1\top}]c$ et $\rho_{1\top} c = \{i \mapsto \top_{1i} \sqcup c, y \mapsto c\}$.
$F_1[\![\texttt{let}\ y = M\ \texttt{in}\ N]\!]\rho_1 c = F_1[\![N]\!]\rho_1[y \mapsto F_1[\![M]\!]\rho_1 \sqcup \lambda c.\{y \mapsto c\}]c \sqcup F_1[\![M]\!]\rho_1 c_{|\,Var}$
$F_1[\![\texttt{let rec}\ f(y) = M\ \texttt{in}\ N]\!]\rho_1 c = F_1[\![N]\!]\rho_3 c \sqcup \rho_3(f)c_{|\,Var}$
avec $\rho_3 = \mathrm{lfp}(\lambda\rho_3.\rho_1[f \mapsto F_1[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_3 \sqcup \lambda c.\{f \mapsto c\}])$.
$F_1[\![\texttt{if}\ M\ \texttt{then}\ N\ \texttt{else}\ P]\!]\rho_1 c = F_1[\![M]\!]\rho_1 c_{|\,Var} \sqcup F_1[\![N]\!]\rho_1 c \sqcup F_1[\![P]\!]\rho_1 c$
$F_1[\![M :: N]\!]\rho_1 c = F_1[\![M]\!]\rho_1 c \sqcup F_1[\![N]\!]\rho_1 c$
$F_1[\![(M, N)]\!]\rho_1 c = F_1[\![M]\!]\rho_1 c \sqcup F_1[\![N]\!]\rho_1 c$
$F_1[\![M\,; N]\!]\rho_1 c = F_1[\![M]\!]\rho_1 c_{|\,Var} \sqcup F_1[\![N]\!]\rho_1 c$
$\rho_1[\![:=]\!]c = \{1 \mapsto c, 2 \mapsto \top_{1,2} \sqcup c\}$
$\rho_1[\![a]\!]c = \{\}$ où $a \in \{\texttt{true}, \texttt{false}, []\} \cup \mathbb{Z}$.
$\rho_1[\![f]\!]c = \{1 \mapsto c, i \mapsto \top_{1i} \sqcup c\}$ où f vaut `hd`, `tl`, `fst`, `snd`, `ref` ou `!`.
$\rho_1[\![\texttt{null}]\!]c = \{1 \mapsto c\}$

$F_2[\![M]\!] : Env_2 \to Val_2$
$F_2[\![y]\!]\rho_2 c = \rho_2[\![y]\!]c$
$F_2[\![M\ N]\!]\rho_2 c = \{i \mapsto \phi(i+1), x \mapsto \phi(x) \sqcup \psi(x)\}$ avec $\phi = F_2[\![M]\!]\rho_2 c$ et $\psi = F_2[\![N]\!]\rho_2(\phi(1))$.
$F_2[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_2 c = \{1 \mapsto \phi(y), i \mapsto \phi(i-1)$ si $i > 1, x \mapsto \phi(x)\}$
où $\phi = F_2[\![M]\!]\rho_2[y \mapsto \rho_{2\top}]c$ et $\rho_{2\top} c = \{i \mapsto \top_{2i}, y \mapsto c\}$.
$F_2[\![\texttt{let}\ y = M\ \texttt{in}\ N]\!]\rho_2 c = F_2[\![N]\!]\rho_2[y \mapsto F_2[\![M]\!]\rho_2 \sqcup \lambda c.\{y \mapsto c\}]c \sqcup F_2[\![M]\!]\rho_2 0_{|\,Var}$
$F_2[\![\texttt{let rec}\ f(y) = M\ \texttt{in}\ N]\!]\rho_2 c = F_2[\![N]\!](\mathrm{lfp}(\lambda\rho_4.\rho_2[f \mapsto F_2[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_4 \sqcup \lambda c.\{f \mapsto c\}])c$
$F_2[\![\texttt{if}\ M\ \texttt{then}\ N\ \texttt{else}\ P]\!]\rho_2 c = F_2[\![M]\!]\rho_2 0_{|\,Var} \sqcup F_2[\![N]\!]\rho_2 c \sqcup F_2[\![P]\!]\rho_2 c$
$F_2[\![M :: N]\!]\rho_2 c = F_2[\![M]\!]\rho_2(c \sqcap \top_{2M}) \sqcup F_2[\![N]\!]\rho_2 c$
$F_2[\![(M, N)]\!]\rho_2 c = F_2[\![M]\!]\rho_2(c \sqcap \top_{2M}) \sqcup F_2[\![N]\!]\rho_2(c \sqcap \top_{2N})$
$F_2[\![M\,; N]\!]\rho_2 c = F_2[\![M]\!]\rho_2 0_{|\,Var} \sqcup F_2[\![N]\!]\rho_2 c$
$\rho_2[\![\texttt{ref}]\!]c = \{1 \mapsto c \sqcap \top_{2,1}, i \mapsto \top_{2i}$ si $i > 1\}$
$\rho_2[\![:=]\!]c = \{2 \mapsto \top_{2,2}\}$
$\rho_2[\![a]\!]c = \{\}$ si $a \in \{\texttt{true}, \texttt{false}, []\} \cup \mathbb{Z}$.
$\rho_2[\![f]\!]c = \{1 \mapsto c, i \mapsto \top_{2i}$ si $i > 1\}$ si f vaut `hd`, `tl`, `fst`, `snd` ou `!`.
$\rho_2[\![\texttt{null}]\!]c = \{\}$

FIG. 2.5 – *Analyses F_1 et F_2*

Théorème 2.27 *Les analyses $f_1 \in Ctx_1 \to Ctx_1$ et $f_2 \in Ctx_2 \to Ctx_2$ qui donnent l'information d'échappement sur une variable de type τ' dans un terme de type τ sont dites correctes par rapport à $f \in Ctx \to Ctx$ si*

$$C(\tau[\tau'], f, f_1, f_2) \Leftrightarrow \begin{cases} Si\ f_1 1 = 0,\ f\ Chem \subseteq \gamma_2^{\tau'}(0) \\ Si\ f_1 0 = 0,\ f(\gamma_2^{\tau}(c)) \subseteq \gamma_2^{\tau'}(f_2 c) \end{cases}$$

Le premier cas traite la situation où une fermeture s'échappe dans le résultat (le contexte passé à l'analyse f_1 est 1). Dans ce cas, l'analyse f_1 est juste une approximation grossière qui dit que toutes les variables libres s'échappent, donc si f_1 donne 0 comme résultat, on sait que la variable n'est pas libre et rien ne s'en échappe. Le deuxième cas traite la situation où aucune fermeture ne s'échappe dans le résultat. Dans ce cas, l'analyse f_1 a pour résultat 0 si on peut prouver qu'aucune fermeture ne s'échappe de la variable, et quand $f_1 0 = 0$, l'analyse f_2 donne l'information d'échappement précise.

Alors,

$$\forall y, \forall x, C(\tau_y[\tau_x], \lambda c.\rho[\![y]\!]cx, \lambda c_1.\rho_1[\![y]\!]c_1 x, \lambda c_2.\rho_2[\![y]\!]c_2 x) \Rightarrow$$
$$\forall x, C(\tau_M[\tau_x], \lambda c.E[\![M]\!]\rho cx, \lambda c_1.F_1[\![M]\!]\rho_1 c_1 x, \lambda c_2.F_2[\![M]\!]\rho_2 c_2 x)$$

Comme l'environnement initial vérifie $\forall y, \forall x, C(\tau_y[\tau_x], \lambda c.\rho[\![y]\!]cx, \lambda c_1.\rho_1[\![y]\!]c_1 x, \lambda c_2.\rho_2[\![y]\!]c_2 x)$, on en déduit que $\forall x, C(\tau_M[\tau_x], \lambda c.E[\![M]\!]\rho cx, \lambda c_1.F_1[\![M]\!]\rho_1 c_1 x, \lambda c_2.F_2[\![M]\!]\rho_2 c_2 x)$, ce qui prouve la correction des analyses F_1 et F_2 :

$$\begin{cases} Si\ F_1[\![M]\!]\rho_1 1x = 0,\ E[\![M]\!]\rho\ Chem\ x \subseteq \gamma_2^{\tau_x}(0) \\ Si\ F_1[\![M]\!]\rho_1 0x = 0,\ E[\![M]\!]\rho(\gamma_2^{\tau_M}(c))x \subseteq \gamma_2^{\tau_x}(F_2[\![M]\!]\rho_2 cx) \end{cases}$$

Preuve : On montre tout d'abord les résultats suivants, avec $I_i : Ctx_i \to Ctx_i, I_i c = c$:

$$C(\tau'[\tau''], f, f_1, f_2) \text{ et } C(\tau[\tau'], g, g_1, g_2) \Rightarrow C(\tau[\tau''], f \circ g, f_1 \circ (g_1 \sqcup I_1), f_2 \circ g_2) \tag{2.11}$$
$$C(\tau[\tau'], f, f_1, f_2) \text{ et } C(\tau[\tau'], g, g_1, g_2) \Rightarrow C(\tau[\tau'], f \sqcup g, f_1 \sqcup g_1, f_2 \sqcup g_2) \tag{2.12}$$
$$\text{Si } k \subseteq \gamma_2^{\tau'}(0),\ C(\tau[\tau'], \lambda c.k, \lambda c_1.0, \lambda c_2.0) \tag{2.13}$$
$$\text{Sinon, } C(\tau[\tau'], \lambda c.k, \lambda c_1.c_1 \sqcup k_1, \lambda c_2.k_2) \text{ où } (k_1, k_2) = \alpha_1^{\tau'}(k) \tag{2.14}$$
$$C(\tau[\tau], \lambda c.c, I_1, I_2) \tag{2.15}$$
$$C(\tau[\tau'], \lambda c.\mathrm{g}.c, I_1, I_2) \tag{2.16}$$
$$C(\tau[\tau'], \lambda c.c_{|g}, I_1, \lambda c.c \sqcap \top_2[\tau']) \tag{2.17}$$

Si $hc = \begin{cases} fc & \text{si } c \in A \\ gc & \text{si } c \in B \end{cases}$ pour $c \in Chem$, la définition correspondante pour $c \in Ctx$ est $hc = \cup_{c' \in A \cap c} fc' \cup \cup_{c' \in B \cap c} gc'$. On peut se contenter de traiter le premier terme en utilisant (2.12). Posons donc : $hc = \cup_{c' \in A \cap c} fc'$, $h_1 c_1 = \begin{cases} f_1 c_1 & \text{si } c_1 = 1 \text{ ou } A \cap \gamma_2^{\tau}(\mathbb{N}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $h_2 c_2 = \begin{cases} f_2 c_2 & \text{si } A \cap \gamma_2^{\tau}(c_2) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Alors

$$C(\tau[\tau'], f, f_1, f_2) \Rightarrow C(\tau[\tau'], h, h_1, h_2) \tag{2.18}$$

$$\begin{array}{l} \forall z, \forall x, C(\tau_z[\tau_x], \lambda c.\rho[\![z]\!]cx, \lambda c_1.\rho_1[\![z]\!]c_1 x, \lambda c_2.\rho_2[\![z]\!]c_2 x) \text{ et} \\ (\forall z, \forall x, C(\tau_z[\tau_x], \lambda c.\rho[\![z]\!]cx, \lambda c_1.\rho_1[\![z]\!]c_1 x, \lambda c_2.\rho_2[\![z]\!]c_2 x) \\ \quad \Rightarrow \forall x. C(\tau[\tau_x], \lambda c.f\rho cx, \lambda c_1.f_1\rho_1 c_1 x, \lambda c_2.f_2\rho_2 c_2 x)) \\ \Rightarrow \forall z, \forall x, C(\tau_z[\tau_x], \lambda c.\,\mathrm{lfp}(\lambda\rho'.\rho[\mathtt{f} \mapsto f\rho' \sqcup \lambda c.\{\mathtt{f} \mapsto c\}])(z)cx, \\ \quad \lambda c_1.\,\mathrm{lfp}(\lambda\rho'.\rho_1[\mathtt{f} \mapsto f_1\rho' \sqcup \lambda c.\{\mathtt{f} \mapsto c\}])(z)cx.\lambda c_2.\,\mathrm{lfp}(\lambda\rho'.\rho_2[\mathtt{f} \mapsto f_2\rho' \sqcup \lambda c.\{\mathtt{f} \mapsto c\}])(z)c_2 x) \end{array} \tag{2.19}$$

– Preuve de (2.11) :

Si $f_1((g_1 \sqcup I_1)1) = f_1 1 = 0$, $f(g\ Chem) \subseteq f\ Chem \subseteq \gamma_2^{\tau''}(0)$.

Si $f_1((g_1 \sqcup I_1)0) = f_1(g_1 0) = 0$, soit $g_1 0 = 1$ et $f_1 1 = 0$ donc comme dans le cas précédent, $f(g\ Chem) \subseteq f\ Chem \subseteq \gamma_2^{\tau''}(0) \subseteq \gamma_2^{\tau''}(f_2(g_2 c))$, soit $g_1 0 = 0$ et $f_1 0 = 0$ et on a $f(\gamma_2^{\tau'}(c)) \subseteq \gamma_2^{\tau''}(f_2 c)$ et $g(\gamma_2^{\tau}(c)) \subseteq \gamma_2^{\tau'}(g_2 c)$, donc $f(g(\gamma_2^{\tau}(c))) \subseteq f(\gamma_2^{\tau'}(g_2 c)) \subseteq \gamma_2^{\tau''}(f_2(g_2 c))$.

- (2.16) résulte de $\mathrm{g}.\gamma_2^{\tau}(c) \subseteq \gamma_2^{\tau'}(c)$ (où τ' vaut $\tau * \tau_2$, τ `ref` ou τ `list`). En effet, supposons $p_0 \in \gamma_2^{\tau}(c)$. Alors $\alpha_2^{\tau'}(\mathrm{g}.p_0) = \alpha_2^{\tau}(p_0) \subseteq c$ d'où le résultat voulu.
- (2.17) résulte de $\gamma_2^{\tau}(c)_{|g} \subseteq \gamma_2^{\tau'}(c \sqcap \top_2[\tau'])$. En effet, supposons $p_0 \in \gamma_2^{\tau}(c)_{|g}$ alors $\mathrm{g}.p_0 \in \gamma_2^{\tau}(c)$ donc $\alpha_2^{\tau}(\mathrm{g}.p_0) = \alpha_2^{\tau'}(p_0) \leq c$. De plus, $\alpha_2^{\tau'}(p_0) \leq \top_2[\tau']$ car la hauteur d'une sous-structure de donnée est inférieure à celle de la structure entière. Alors $\alpha_2^{\tau'}(p_0) \leq c \sqcap \top_2[\tau']$, ce qui donne le résultat voulu.
- Preuve de (2.18) :

  Si $h_1 1 = f_1 1 = 0$, $f\ Chem \subseteq \gamma_2^{\tau'}(0)$ d'où $\cup_{c' \in A} f c' \subseteq \gamma_2^{\tau'}(0)$.

  Si $h_1 0 = 0$, soit $A \cap \gamma_2^{\tau}(\mathbb{N}) = \emptyset$, et $\cup_{c' \in A \cap \gamma_2^{\tau}(c)} f c' = \bot \subseteq \gamma_2^{\tau'}(h_2(c))$, soit $A \cap \gamma_2^{\tau}(\mathbb{N}) \neq \emptyset$ et $f_1 0 = 0$ donc $f(\gamma_2^{\tau}(c)) \subseteq \gamma_2^{\tau'}(f_2 c)$ alors $h(\gamma_2^{\tau}(c)) = \cup_{c' \in A \cap \gamma_2^{\tau}(c)} f c' \subseteq \gamma_2^{\tau'}(h_2 c)$.
- La preuve de (2.19) se fait par une induction transfinie, en utilisant (2.11), facile malgré la lourdeur des notations.

Les autres cas sont plus simples et laissés au lecteur. On montre des propriétés analogues à (2.16) et (2.17) pour les autres constructions et restrictions. On peut alors traduire étape par étape l'analyse E dans les analyses F_1 et F_2. On obtient facilement les analyses annoncées, sauf dans le cas des fermetures, où on obtient :

$$F_1[\![\texttt{fun}\ y \to M]\!]\rho_1 c = \begin{cases} \sqcup_{z \in FV(\texttt{fun}\ y \to M)} \rho_1[\![z]\!]1 & \text{si } c_1 = 1 \\ 0 & \text{si } c_1 = 0 \end{cases} \sqcup \{1 \mapsto \phi(y), i \mapsto \phi(i-1) \text{ si } i > 1, x \mapsto \phi(x)\}$$

Le lemme 2.26 permet de montrer que le premier terme est majoré par le second et d'en déduire la forme annoncée.

□

Théorème 2.28 (Correction des analyses F_1 et F_2) *Considérons l'expression :* `let` x `=` M `in` N *ou* `let rec` $x(y)$ `=` M `in` N. *Soit l la cellule au sommet de x. Supposons que la création de cette cellule soit la dernière opération de M. Supposons de plus que :*

$$\begin{cases} \textit{si ni } N \textit{ ni } x \textit{ ne sont fonctionnels,} & F_1[\![N]\!]\rho_1 0x = 0 \textit{ et } F_2[\![N]\!]\rho_2 \top_{2N} x < \top_{2x} \\ \textit{si } N \textit{ est fonctionnel,} & F_1[\![N]\!]\rho_1 1x = 0 \\ \textit{si } N \textit{ est non fonctionnel et } x \textit{ est fonctionnel,} & F_1[\![N]\!]\rho_1 0x = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Alors l est allouable en pile.

Preuve : La condition (2.20) combinée au théorème 2.27 montre que $E[\![N]\!]\rho\ Chem\, x \subseteq a$, où $\top \notin a$. En effet, si x est fonctionnel, $a = \gamma_2^x(b)$ ne contient pas de type fonctionnel. Sinon, $a = \gamma_2^x(b)$ avec $b < \top_{2x}$ donc les données référencées par a ont des types sous-types stricts du type de x. Alors $\top \notin E[\![N]\!]\rho\ Chem\, x$.

Le théorème 2.24 permet alors de conclure. □

2.5 Traitement du polymorphisme

On analyse d'abord toutes les expressions en les considérant comme monomorphes, c'est-à-dire que les variables de type sont supposées de type atomique : $\top_2[\beta] = 1, \alpha_2^{\beta}(c_1.\bot) = 0, \alpha_2^{\beta}(c_1.\top) = 1$ si β est une variable de type. On peut alors en déduire une analyse approchée pour les instanciations de

cette expression, mais attention, ceci peut entraîner une perte de précision par rapport à l'analyse directe de l'instanciation en question. Par exemple, si $\tau = 'a * 'b$ et qu'on l'instancie par $\sigma = \{'a \mapsto$ `bool list list`$, 'b \mapsto$ `bool`$\}$, si on sait que le niveau 1 de τ s'échappe, ce qui correspond à $'a$ ou $'b$, on dira que le niveau 3 de $\sigma\tau$ s'échappe, alors qu'en fait si $'b$ seul s'échappe, l'analyse directe aurait indiqué que le niveau 1 de $\sigma\tau$ s'échappe, ce qui est nettement plus précis.

Mais chose plus surprenante, l'analyse obtenue par instanciation peut aussi être plus précise que l'analyse directe. Par exemple,

```
phi = fun x -> fun y ->
        let z = (x,y) in
          a := snd z;
          fst z
```

Ici, l'analyse donne $F_2[\![$`phi`$]\!]\rho c1 = c \sqcup \top_2[\tau]$ si `y` est de type τ. Supposons qu'on effectue une analyse sur la version générale $\tau = \beta$. Alors $F_2[\![$`phi`$]\!]\rho c1 = c \sqcup 1$ et l'instanciation laisse cette valeur (car on instancie relativement au type de `x` indépendamment de celui de `y`). Par contre, l'analyse directe avec $\tau =$ `int list` par exemple donne $F_2[\![$`phi`$]\!]\rho c1 = c \sqcup 2$ ce qui est moins précis.

Finalement, l'analyse obtenue par instanciation et l'analyse directe sont incomparables. Autrement dit, les analyses F_1 et F_2 ne sont pas polymorphiquement invariantes [Abr86]. On peut cependant prouver la correction par rapport à l'analyse E.

Définition 2.29 Soit σ une substitution fixée sur les variables de type. Les fonctions d'instanciation et de généralisation sont respectivement :

$$I_2^\tau(c') = \begin{cases} \sqcup\{\top_2[\sigma\tau'] \mid \tau' \text{ sous-expression de } \tau, \top_2[\tau'] \leq c'\} & \text{si } c' > 0 \\ 0 & \text{si } c' = 0 \end{cases}$$

$$G_2^\tau(c) = \begin{cases} \sqcup\{\top_2[\tau'] \mid \tau' \text{ sous-expression de } \tau, \top_2[\sigma\tau'] \leq c\} \sqcup 1 & \text{si } c > 0 \\ 0 & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

où τ est le type associé aux contextes qu'on instancie ou qu'on généralise, et la définition des sous-expressions diffère de la définition habituelle pour le type fonction : ce sont uniquement les sous-expressions du type du résultat. Elles ne forment pas une correspondance de Galois. Pour l'analyse F_1, l'instanciation est $I_1^\tau(c,b) = 1$ si σ substitue certaines variables de type de τ par des fonctions et $b \neq 0$, et $I_1^\tau(c,b) = c$ sinon. La généralisation est $G_1^\tau(c) = c$.

Lemme 2.30 *$\alpha_2^{\sigma\tau} \leq I_2^\tau \circ \alpha_2^\tau$ quand $\alpha_2^{\sigma\tau} \neq \infty$. Ceci exprime que $I_2^\tau(c)$ correspond à au moins autant de chemins dans le type $\sigma\tau$ que c dans le type τ.*

Preuve : Soit $c \in Chem$. Si $c = c_1.\bot$, $\alpha_2^{\sigma\tau}(c) = 0$ donc on a le résultat. Si $c = c_1.\top$, soit il existe une sous-expression τ_0 de τ telle que $\alpha_2^\tau(c_1.\top) = \alpha_2^{\tau_0}(\top)$. Alors,

$$\begin{aligned} \alpha_2^{\sigma\tau}(c_1.\top) &= \alpha_2^{\sigma\tau_0}(\top) \\ &= \top_2[\sigma\tau_0] \\ &\leq I_2^\tau(\top_2[\tau_0]) \text{ par définition de } I_2 \\ &\leq I_2^\tau(\alpha_2^{\tau_0}(\top)) \\ &\leq I_2^\tau(\alpha_2^\tau(c_1.\top)) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu. Soit $\alpha_2^\tau(c_1.\top) = \alpha_2^\beta(c_1'.\top) = 1$. Alors,

$$\begin{aligned} \alpha_2^{\sigma\tau}(c_1.\top) &= \alpha_2^{\sigma\beta}(c_1'.\top) \\ &\leq \top_2[\sigma\beta] \text{ car } \alpha_2^{\sigma\beta}(c_1'.\top) \neq \infty \\ &\leq I_2^\tau(\top_2[\beta]) \text{ par définition of } I_2 \\ &\leq I_2^\tau(1) \\ &\leq I_2^\tau(\alpha_2^\tau(c_1.\top)) \end{aligned}$$

ce qui est encore le résultat voulu. Le passage aux ensembles de chemins est facile car α_2 est additive et I_2 est croissante. □

Théorème 2.31 (Instanciation) *Soit* $f = \lambda c.E[\![M]\!]\rho cx$.

$$C(\tau[\tau_x], f, \lambda c.(c \sqcap a_1) \sqcup b_1, \lambda c.(c \sqcap a_2) \sqcup b_2)$$
$$\Rightarrow C(\sigma\tau[\sigma\tau_x], f, \lambda c.(c \sqcap a_1) \sqcup I_1^{\tau_x}(b_1, b_2), \lambda c.(c \sqcap I_2^{\tau_x}(a_2)) \sqcup I_2^{\tau_x}(b_2))$$

Ceci est utile dans l'implémentation car toutes les fonctions manipulées sont de cette forme (on le vérifie facilement sur les équations, car cette forme est stable par composition, par minimum et par maximum). Ceci prouve la correction des fonctions d'instanciation I_2^τ *et* I_1^τ.

Preuve : On a donc par hypothèse :

$$\begin{cases} \text{Si } a_1 \sqcup b_1 = 0,\ f\ Chem \subseteq \gamma_2^{\tau_x}(0) \\ \text{Si } b_1 = 0,\ f(\gamma_2^\tau(c)) \subseteq \gamma_2^{\tau_x}((c \sqcap a_2) \sqcup b_2) \end{cases}$$

Il s'agit de montrer :

- Si $a_1 \sqcup I_1^{\tau_x}(b_1, b_2) = 0$, $f\ Chem \subseteq \gamma_2^{\sigma\tau_x}(0)$.
  Or $a_1 = b_1 = 0$ donc $f\ Chem \subseteq \gamma_2^{\tau_x}(0) = \gamma_2^{\sigma\tau_x}(0)$.
- Si $I_1^{\tau_x}(b_1, b_2) = 0$, $f(\gamma_2^{\sigma\tau}(c)) \subseteq \gamma_2^{\sigma\tau_x}((c \sqcap I_2^{\tau_x}(a_2)) \sqcup I_2^{\tau_x}(b_2))$.
  Or $b_1 = 0$ donc $f(\gamma_2^\tau(c)) \subseteq \gamma_2^{\tau_x}((c \sqcap a_2) \sqcup b_2)$. On procède alors par induction sur la forme de $f = \lambda c.E[\![M]\!]\rho cx$ pour montrer que, si $b_1 = 0$ et σ ne substitue pas de variable de type de τ_x par des fonctions ou que $b_2 = 0$, $f(\gamma_2^\tau(c)) \subseteq \gamma_2^{\tau_x}((c \sqcap a_2) \sqcup b_2) \Rightarrow f(\gamma_2^{\sigma\tau}(c)) \subseteq \gamma_2^{\sigma\tau_x}((c \sqcap I_2^{\tau_x}(a_2)) \sqcup I_2^{\tau_x}(b_2))$. On peut toujours mettre f sous la forme $f(c) = \bigsqcup_{i \in I} c_i.c_{|c_i'} \sqcup c_1$ où $c_i \in (\text{app}|\text{g}|\text{d})^*$, $c_i' \in (\rightarrow |\text{g}|\text{d})^*$, $c_1 \in Ctx$ et où l'union peut être infinie (on le voit facilement car cette forme est stable par composition, borne supérieure, restriction et construction de chemins et par point fixe).
  - Si $f(c) = c_1$, il suffit de montrer que $c_1 \subseteq \gamma_2^{\tau_x}(b_2) \Rightarrow c_1 \subseteq \gamma_2^{\sigma\tau_x}(I_2^{\tau_x}(b_2))$ donc que $\gamma_2^{\tau_x}(b_2) \subseteq \gamma_2^{\sigma\tau_x} \circ I_2^{\tau_x}(b_2)$. Si $b_2 = 0$ c'est évident. Sinon, σ ne substitue pas de variable de type de τ_x par des fonctions, tous les chemins de $\gamma_2^{\tau_x}(b_2)$ sont non fonctionnels dans τ_x donc aussi dans le type $\sigma\tau_x$, donc $\alpha_2^{\sigma\tau_x}(\gamma_2^{\tau_x}(b_2)) \neq \infty$. Alors le lemme 2.30 donne : $\alpha_2^{\sigma\tau_x} \circ \gamma_2^{\tau_x} \leq I_2^{\tau_x} \circ \alpha_2^{\tau_x} \circ \gamma_2^{\tau_x} = I_2^{\tau_x}$. Donc la propriété de correspondance de Galois donne le résultat voulu.
  - Si $f(c) = c_1.c_{|c_2}$, si $c_1.\gamma_2^\tau(c)_{|c_2} \subseteq \gamma_2^{\tau_x}((c \sqcap a_2) \sqcup b_2)$, considérons le type τ_0 associé aux contextes $c_{|c_2}$ et $f(c)_{|c_1}$, en prenant $c = \top_2[\tau_0]$, $a_2 \sqcup b_2 \geq \alpha_2^{\tau_x}(c_1.NF(\tau_0)) \geq \alpha_2^{\tau_x}(c_1.NF(\sigma\tau_0))$ où $NF(\tau)$ est l'ensemble des chemins menant à un type non fonctionnel dans τ. En effet, $NF(\tau_0) \supseteq NF(\sigma\tau_0)$. Alors
    $$I_2^{\tau_x}(a_2) \sqcup I_2^{\tau_x}(b_2) \geq I_2^{\tau_x} \circ \alpha_2^{\tau_x}(c_1.NF(\sigma\tau_0)) \geq \alpha_2^{\sigma\tau_x}(c_1.NF(\sigma\tau_0))$$
    d'après le lemme 2.30, donc
    $$\begin{aligned} \gamma_2^{\sigma\tau_x}((c \sqcap I_2^{\tau_x}(a_2)) \sqcup I_2^{\tau_x}(b_2)) &\supseteq \gamma_2^{\sigma\tau_x}(c \sqcap \alpha_2^{\sigma\tau_x}(c_1.NF(\sigma\tau_0))) \\ &\supseteq \gamma_2^{\sigma\tau_x}(c) \sqcap c_1.NF(\sigma\tau_0) \\ &\supseteq c_1.\gamma_2^{\sigma\tau}(c)_{|c_2} \end{aligned}$$
    car
    $$\alpha_2^{\sigma\tau_x}(c_1.\gamma_2^{\sigma\tau}(c)_{|c_2}) \leq \alpha_2^{\sigma\tau_0}(\gamma_2^{\sigma\tau}(c)_{|c_2}) \leq \alpha_2^{\sigma\tau}(\gamma_2^{\sigma\tau}(c)) = c$$
  - Si $f(c) = \bigsqcup_{i \in I} f_i(c)$: facile en utilisant la croissance de I_2.

  Ceci donne le résultat voulu.

□

Exemple 2.32 La fonction `map` est de type $(\alpha \to \beta) \to \alpha$ `list` $\to \beta$ `list`. L'analyse de la version polymorphe donne :

$$\rho_1[\![\texttt{map}]\!]c = \{\texttt{map} \mapsto c, 1 \mapsto c, 2 \mapsto c\}$$
$$\rho_2[\![\texttt{map}]\!]c = \{\texttt{map} \mapsto c, 1 \mapsto c \sqcap 1, 2 \mapsto 1\}$$

Quand on instancie $\alpha = \tau_1, \beta = \tau_2$, où τ_1 et τ_2 ne sont par des types fonctionnels :

$$\rho_1[\![\texttt{map}]\!]c = \{\texttt{map} \mapsto c, 1 \mapsto c, 2 \mapsto c\}$$
$$\rho_2[\![\texttt{map}]\!]c = \{\texttt{map} \mapsto c, 1 \mapsto c \sqcap \top_2[\tau_2], 2 \mapsto \top_2[\tau_1]\}$$

Lemme 2.33 $\alpha_2^\tau \leq G_2^\tau \circ \alpha_2^{\sigma\tau}$. *Ceci exprime que $G_2^\tau(c)$ correspond à au moins autant de chemins dans le type τ que c dans le type $\sigma\tau$.*

Preuve : Soit $c \in \mathit{Chem}$. Si $c = c_1.\bot$, $\alpha_2^\tau(c) = 0$ donc on a les résultat voulu. Si $c = c_1.\top$, soit il existe τ_0 une sous-expression de τ telle que $\alpha_2^\tau(c_1.\top) = \alpha_2^{\tau_0}(\top)$. Alors,

$$\begin{aligned}
\alpha_2^\tau(c_1.\top) &= \alpha_2^{\tau_0}(\top) \\
&= \top_2[\tau_0] \\
&\leq G_2^\tau(\top_2[\sigma\tau_0]) \text{ par définition de } G_2 \\
&\leq G_2^\tau(\alpha_2^{\sigma\tau_0}(\top)) \\
&\leq G_2^\tau(\alpha_2^{\sigma\tau}(c_1.\top))
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu. Sinon, c correspond à la pénétration dans une variable de type de τ, donc $\alpha_2^\tau(c) = 1 \leq G_2^\tau \circ \alpha_2^{\sigma\tau}(c)$. Le passage aux ensembles de chemins est facile car α_2 est additive et G_2 est croissante. □

Théorème 2.34 (Généralisation)

$$C(\tau[\tau_x], f, f_1, f_2) \Rightarrow C(\sigma\tau[\tau_x], f, f_1, f_2 \circ G_2^\tau)$$

Ceci montre la correction des fonctions de généralisation $G_1 = \mathrm{id}$ et G_2. Ceci est utile en particulier quand on instancie une variable y de type τ dans le type $\sigma\tau$ (cas $f = \lambda c.E[\![y]\!]\rho cx$). On posera alors

$$F_1[\![\Gamma, y : \tau \vdash y : \sigma\tau]\!]\rho_1 = \rho_1 \text{ et } F_2[\![\Gamma, y : \tau \vdash y : \sigma\tau]\!]\rho_2 cx = \rho_2(G_2^\tau(c))x$$

Preuve : On a par hypothèse,

$$\begin{cases} \text{Si } f_1 1 = 0,\ f\ \mathit{Chem} \subseteq \gamma_2^{\tau_x}(0) \\ \text{Si } f_1 0 = 0,\ f(\gamma_2^\tau(c)) \subseteq \gamma_2^{\tau_x}(f_2 c) \end{cases}$$

On veut prouver que

- Si $\rho_1 1x = 0$, $f\ \mathit{Chem} \subseteq \gamma_2^{\tau_x}(0)$: c'est dans les hypothèses.
- Si $\rho_1 0x = 0$, $f(\gamma_2^{\sigma\tau}(c)) \subseteq \gamma_2^{\tau_x}(f_2(G_2^\tau(c)))$. On a par hypothèse, $f(\gamma_2^\tau(G_2^\tau(c))) \subseteq \gamma_2^{\tau_x}(f_2(G_2^\tau(c)))$, il suffit alors de prouver que $\gamma_2^{\sigma\tau}(c) \subseteq \gamma_2^\tau(G_2^\tau(c))$ ce qu'on déduit du lemme 2.33.

□

Chapitre 3

Implémentation de l'analyse

3.1 Description générale de l'algorithme

Le programme d'analyse fonctionne en deux passes. Il prend en argument l'arbre de syntaxe abstraite du programme à analyser. La première passe le transforme en un arbre étiqueté avec toutes les informations fournies par l'analyse d'échappement. La seconde passe prend cet arbre étiqueté et décide des transformations à effectuer dans le programme pour l'optimiser.

3.2 Calcul des hauteurs des types

Comme on a vu dans la section 2.4, on associe à chaque type τ, sa hauteur $\top_2[\tau]$. Cette hauteur doit vérifier la propriété suivante : si une valeur v_1 de type τ_1 est à l'intérieur de v_2 de type τ_2, $\top_2[\tau_1] \leq \top_2[\tau_2]$. Alors, dans le cas de types récursifs comme les listes ou certains types définis par l'utilisateur, toutes les cellules d'une même composante fortement connexe du type doivent avoir la même hauteur. Entre composantes fortement connexes distinctes, on ajoute 1 à la hauteur.

Exemple 3.1 Considérons la déclaration de type suivante :

```
type term =
    Var of int
  | Prop of head * term list
and head =
    { name: string;
      mutable props: (term * term) list }
```

$\top_2[\texttt{term}] = \top_2[\texttt{term list}] = \top_2[\texttt{term} * \texttt{term}] = \top_2[(\texttt{term} * \texttt{term})\texttt{list}] = \top_2[\texttt{head}] = 2$ et $\top_2[\texttt{head list}] = 1 + \top_2[\texttt{head}] = 3$ car ce type n'est pas dans la même composante fortement connexe.

On peut remarquer que cette définition est compatible avec la définition précédente de $\top_2$ pour le type `list` :

```
type 'a list = Nil | Cons of 'a * 'a list
```

De plus, cette contrainte ne peut pas toujours être respectée : on ne sait pas quelles sont les valeurs à l'intérieur des fermetures. Dans ce cas, on dit que le type considéré ne préserve pas les niveaux, et il est traité comme les types fonctionnels dans la section 2.4. D'autre part, si τ est un type abstrait, $\top[\tau] = 1$ (mais τ préserve les niveaux, car on ne peut rien extraire de τ).

Un autre cas qui pose des difficultés est celui des types récursifs non monotones : dans la définition d'un constructeur de type polymorphe, on peut faire appel à ce même constructeur avec des paramètres différents, par exemple

α `t = None | Some of` α `*` α `list t`

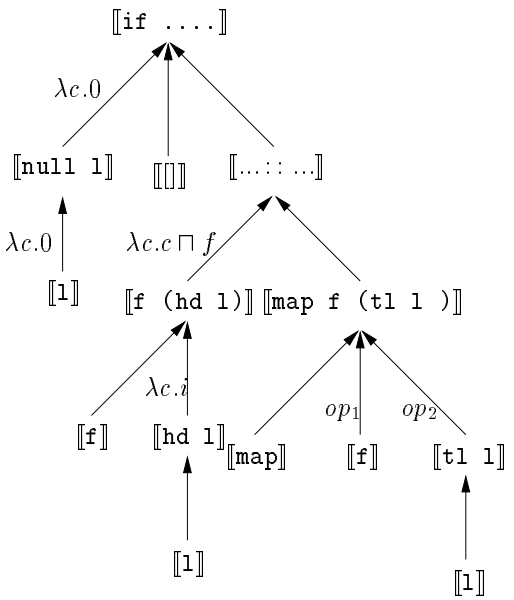


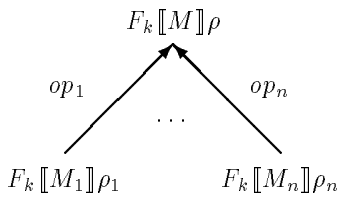
FIG. 3.1 – *Arbre construit pour l'exemple 2.20. L'opération identité a été omise.* op_1 *et* op_2 *sont les inconnues qui représentent l'échappement des paramètres de la fonction* `map`

La détection de cycle ne suffit alors pas car on fait appel à une infinité de types différents α `list` ... `list t`. Ce cas est détecté et traité séparément : le type est déclaré ne pas préserver les niveaux, et sa hauteur vaut 1. De toute façon, un tel type n'a pas d'utilité pratique, car on ne peut pas écrire d'itérateur dessus. Le cas où on fait appel dans la définition de `t` à plusieurs instances de `t` mais à un nombre fini est traité de même que le cas infini par souci de simplicité, bien qu'on puisse ici faire mieux (ces types sont rarement utiles).

Ce calcul étant assez lent, on l'optimise en traduisant le langage de type d'origine vers des types étiquetés avec leur hauteur. Ceci évite d'avoir à recalculer la hauteur plusieurs fois pour le même type.

3.3 Construction des équations sémantiques

On représente les équations sémantiques par un anti-arbre dont les nœuds sont les occurrences de $F_k[\![M]\!]\rho$ et les arêtes sont telles que $F_k[\![M]\!]\rho = \sqcup_i F_k[\![M_i]\!]\rho_i \circ op_i$ si $F_k[\![M]\!]\rho$ est lié par des arêtes étiquetées op_i à $F_k[\![M_i]\!]\rho_i$. On voit facilement sur la définition de F_1 et F_2 que toutes les opérations à considérer sont de la forme $op = \lambda c.(c \sqcap f) \sqcup i$. On peut alors représenter ces opérations par les couples (f, i).



On définit la composition des opérations sur les couples associés :

$$(f_1, i_1) \circ (f_2, i_2) = (f_1 \sqcap f_2, (i_2 \sqcap f_1) \sqcup i_1)$$

Si certaines de ces valeurs sont inconnues, il faut créer de nouvelles inconnues pour représenter l'opération composée et émettre des équations qui traduisent la formule ci-dessus.

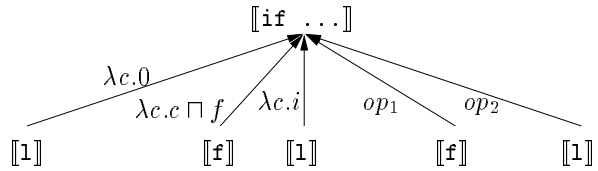


FIG. 3.2 – *Figure 3.1 après compression de chemin*

L'anti-arbre est muni de deux opérations *eval* et *link* comme dans l'article de Tarjan [Tar79]. $eval(n)$ calcule la composée des opérations qui étiquettent les arêtes du nœud n à la racine de l'anti-arbre en effectuant de la compression de chemin : tous les nœuds sur le chemin de n à la racine sont liés directement à la racine après $eval(n)$ et les étiquettes des arêtes sont correctement mises à jour. $link(n_1, n_2, op)$ lie le nœud n_1 au nœud n_2 avec l'opération op (n_1 doit être une racine d'anti-arbre, car chaque nœud n'a qu'un père).

On représente le calcul de point fixe en utilisant des opérations op_i inconnues, que l'on détermine par la méthode de résolution décrite dans la section suivante.

On maintient la relation $F_k[\![M]\!]\rho = \sqcup_{x \in FV(M), n \in \delta(x)} \rho[\![x]\!] \circ eval(n)$ quand on analyse M, où $\delta(x)$ est l'ensemble des nœuds représentant des occurences de x. Ceci permet de calculer F_k. L'échappement d'une variable x est $\sqcup_{n \in \delta(x)} eval(n)$ où les *eval* doivent remonter jusqu'à l'expression qui lie x comme on peut facilement le déduire de la définition des étiquettes. Pour effectuer ce calcul, on mémorise pour chaque variable la liste de ses nœuds occurences, le calcul lui-même est retardé jusqu'à la remontée dans le lieur de x.

L'échappement d'une expression M dans une de ses sur-expressions N est la composition des opérations du nœud n qui représente M à celui qui représente N. On la calcule en effectuant $eval(n)$ dans l'analyse de N. Pour chaque expression, on souhaite calculer son échappement dans l'expression immédiatement englobante, qui est simplement l'étiquette de l'arête qui lie n à son père, mais aussi jusqu'à la plus grande expression où on peut faire remonter les `let` de M (dite expression de contrôle). Cette expression est la première expression englobante de la forme :

```
fun y -> []
if [] then [] else []
let rec x = [] in M
[] && []
[] or []
match [] with p -> []
try [] with p -> []
M <- []
[]; []
while [] do [] done
for i=M to N do [] done
[] when []
```

Autrement dit, si un `let` est dans une expression `[]` de la liste ci-dessus, il n'en sort pas.

Cette définition est quelque peu heuristique. Elle doit surtout veiller à ne jamais provoquer d'évaluations supplémentaires ou changer le nombre d'évaluations du fait du déplacement d'un `let`. D'autre part, il est inutile de remonter davantage un `let` quand on sait que le contexte d'échappement ne changera plus (cas du membre droit de `<-`). Ce contexte d'échappement permet de savoir si on va pouvoir placer une valeur en pile : elle ne doit pas s'échapper de la plus grande expression de contrôle. L'échappement vis-à-vis de l'expression immédiatement englobante servira à déterminer plus précisément la durée de vie à donner à cette valeur.

On calcule aussi un autre contexte : l'échappement dans les appels terminaux. Le calcul est identique au précédent sauf que lors d'un appel terminal, on considère que tous les paramètres s'échappent. On ajoute pour cela à chaque opération op un troisième élément i_t en plus du couple (f, i) car la valeur

de f est la même que pour l'analyse normale. La loi de composition devient sur les triplets :

$$(f_1, i_1, i_{t1}) \circ (f_2, i_2, i_{t2}) = (f_1 \sqcap f_2, (i_2 \sqcap f_1) \sqcup i_1, (i_{t2} \sqcap f_1) \sqcup i_{t1})$$

Cet échappement permet de déterminer si on peut libérer les valeurs avant l'appel terminal, ce qui permet de conserver les optimisations des appels terminaux.

Exemple 3.2 Reprenons l'exemple de la fonction `map` et supposons que l'expression `map g a` est en position terminale. Alors dans ce formalisme à triplets, les analyses sont codées comme suit :

$$F_1[\![\texttt{map g a}]\!]\rho_1 = \{\texttt{g} \mapsto (0,0,1), \texttt{a} \mapsto (0,0,0), \texttt{map} \mapsto (0,0,1)\}$$

$$F_2[\![\texttt{map g a}]\!]\rho_2 = \{\texttt{g} \mapsto (\top_{2\texttt{g}}, 0, \top_{2\texttt{g}}), \texttt{a} \mapsto (\top_{2\texttt{a}} - 1, 0, \top_{2\texttt{a}}), \texttt{map} \mapsto (\top_{2\texttt{map}}, 0, \top_{2\texttt{map}})\}$$

L'analyse F_1 exprime que les fermetures de `map` et `g` s'échappent dans l'appel terminal car le dernier élément du triplet, i_t, vaut 1 pour ces deux variables. Ce sont les seules fermetures qui s'échappent. L'analyse F_2 exprime que le résultat de `g`, `a` et le résultat de `map` s'échappent dans l'appel terminal (car i_t vaut la hauteur de chacune de ces variables). Pour `g` et `map`, F_1 vient compléter comme on l'a vu pour indiquer que la fermeture s'échappe. D'autre part, le résultat de `g`, les éléments de la liste `a` et le résultat de `map` s'échappent quand le résultat de `map g a` s'échappe (valeur de f) tandis que rien ne s'échappe si le résultat ne s'échappe pas (valeur de i) ce qui logique car ce programme ne contient aucune construction impérative.

3.4 Résolution

On utilise une généralisation de l'algorithme de Dijkstra des plus courts chemins dans un graphe, donnée par Knuth dans [Knu77].

Cet algorithme utilise une file de priorité qui peut être implémentée efficacement avec un tas binaire, ou mieux un tas de Fibonacci, comme expliqué dans [CLR94].

On cherche le plus petit point fixe d'un système d'équations $Y = \sqcup_i g_i(X_1, \ldots, X_k)$ où les g_i sont des fonctions inférieures : $g_i(x_1, \ldots, x_k) \leq \min(x_1, \ldots, x_k)$. Soit G la grammaire dont les non-terminaux sont les inconnues X_i, et les règles de production $Y \longrightarrow g_i(X_1, \ldots, X_k)$. Soit T l'alphabet terminal, formé des symboles de fonction g, des parenthèses et de la virgule et $L(Y) = \{\alpha \mid \alpha \in T^* \text{ et } Y \longrightarrow^* \alpha\}$ le langage engendré par Y. Soit $val(\alpha)$ la valeur de la chaîne α. Le plus petit point fixe cherché est alors : $m(Y) = \max\{val(\alpha) \mid \alpha \in L(Y)\}$.

L'algorithme est le suivant :

Soit P la file de priorité.

Au départ P contient pour chaque non terminal la clé 0.

Pour chaque équation $Y = g$ (constante), mettre à jour clé$(Y) = \max(\text{clé}(Y), g)$.

Tant que P est non vide,

- Extraire le non-terminal Y de clé maximale dans P. On a alors $m(Y) = \text{clé}(Y)$
- Pour chaque non-terminal qui est encore dans P, mettre à jour

  $$\text{clé}(Y') = \max(\text{clé}(Y'), g(\text{clé}(X_1), \ldots, \text{clé}(X_k)))$$

  pour chaque équation $Y' = g(X_1, \ldots, X_k)$ telle que $X_1, \ldots, X_k$ ne sont pas dans P et Y est un des $X_1, \ldots, X_k$.

La preuve de correction de cet algorithme est dans [Knu77]. Chaque équation est utilisée exactement une fois, quand on sort de P le dernier non-terminal argument de g. L'idée est alors de maintenir pour chaque non-terminal la liste des équations qui le contiennent, avec un compteur indiquant le nombre de non-terminaux de cette équation qui sont dans P. On applique l'équation quand le compteur s'annule.

Supposons que les performances de la file de priorité sont données par T_{max} pour le temps d'extraction du maximum et T_{maj} pour le temps de mise à jour d'une clé. La complexité est alors :

- Temps des extractions de maximum = nombre d'inconnues (noté i) $\times T_{max}$

- Temps de calcul des valeurs de mise à jour = temps total du calcul des équations (noté t)
- Temps des mises à jour des clés = nombre d'équations (noté e) $\times T_{maj}$
- Temps de mise à jour des compteurs = longueur totale des équations = $\mathcal{O}(t)$

d'où la complexité totale $C = \mathcal{O}(i \times T_{max} + e \times T_{maj} + t)$ soit pour une file de priorité implémentée par un tas binaire : $T_{max} = \mathcal{O}(\log i)$, $T_{maj} = \mathcal{O}(\log i)$ donc $C = \mathcal{O}(e \times \log i + t)$ et pour un tas de Fibonacci (en temps amorti) : $T_{max} = \mathcal{O}(\log i)$, $T_{maj} = \mathcal{O}(1)$ donc $C = \mathcal{O}(i \times \log i + t)$. Etant donné la taille des systèmes à résoudre (rarement plus de 10 équations), et le fait qu'en général le nombre d'équations est du même ordre que celui des inconnues, on a estimé que le gain de complexité de l'implémentation avec un tas de Fibonacci ne valait pas la peine, d'autant plus que la constante est plus grande. On a donc utilisé un tas binaire.

L'opération d'instanciation décrite à la section 2.5 ne respecte pas la condition de Knuth : elle n'est pas inférieure. Pour pouvoir utiliser quand même l'algorithme de Knuth, on commence par découper le système en composantes fortement connexes, par l'algorithme classique qui utilise deux parcours en profondeur (voir par exemple [CLR94]). On résout alors séparément chaque composante avec l'algorithme de Knuth. A l'intérieur d'une composante, on approche l'instanciation par la fonction constante égale au sommet du type. Ceci fait perdre en précision, mais est surement correct. Entre les composantes, on peut par contre effectuer l'opération d'instanciation la plus précise.

3.5 Transformation de programme

On utilise une version un peu modifiée de CSL, qui comprend une expression `letstack` $x = M$ `in` N équivalente de `let` $x = M$ `in` N sauf que le dernier constructeur de x sera alloué sur la pile et libéré à la fin de l'exécution de N. On a ajouté une expression `letstack'` $x = M$ `in` N qui alloue aussi le dernier constructeur de x sur la pile, mais le libère avant l'appel terminal de N, ce qui permet de conserver les optimisations des appels terminaux.

Exemple 3.3 Pris dans un programme de complétion de Knuth-Bendix :

```
let kb_completion =
  let rec kbrec j rules =
  let rec process failures (k,l) eqs =
   ...
   let enter_rule(left,right) =
     letstack' left_reducible rule =... in
     letstack' right_reduce rule =... in
       ...
       kbrec (j+1) (new_rule::irreds) []
       (k,l) (eqs @ eqs' @ failures)
   in
  ...
```

Ici, `left_reducible` et `right_reduce` sont libérés avant l'appel récursif terminal à `kbrec`, ce qui évite une augmentation inutile de la taille de la pile.

On transforme alors une expression de la forme `let` $x = M$ `in` N en `letstack` $x = M$ `in` N si le sommet de x est allouable en pile, c'est-à-dire en utilisant le théorème 2.28, si on a la condition (2.20) ce qui est déterminé par l'analyse d'échappement. Pour pouvoir effectuer cette transformation, il faut de plus que l'expression soit d'un type allouable en pile (pas entier, booléen, caractère ou `unit`) et qu'elle ait en tête un allocateur : un constructeur de type, ou une primitive standard qui effectue une allocation. Suivant les options de la ligne de commande, on refuse de mettre un `letstack` qui détruit un appel terminal récursif, ou un appel terminal quelconque. Dans ce cas, seul le `letstack'` est possible, si l'échappement le permet. En effet, si on place un `letstack` en position terminale dans

une boucle récursive, la taille de la pile augmente à chaque tour de boucle alors qu'avec l'optimisation des appels terminaux, elle n'aurait pas augmenté. Ceci peut faire échouer le programme et doit donc être évité (voir l'article de Chase [Cha88] pour plus de détails sur la sureté des allocations en pile).

Une structure `let` qui définit plusieurs variables est découpée en plusieurs `let`s successifs pour pouvoir allouer certaines variables seulement en pile si les autres s'échappent (ce découpage est évidemment impossible dans le cas du `let rec`).

La transformation de programme peut aussi ajouter des lets pour se trouver dans la situation ci-dessus. Par exemple, on peut transformer $M_0 M_1 \ldots M_n$ en

$$\begin{aligned} &\texttt{let } x_0 = M_0 \texttt{ in} \\ &\texttt{let } x_n = M_n \texttt{ in} \\ &\ldots \\ &\texttt{let } x_{i+1} = M_{i+1} \texttt{ in} \\ &\texttt{letstack } x_i = M_i \texttt{ in} \\ &x_0 M_1 \ldots M_{i-1} x_i \ldots x_n \end{aligned}$$

suivant les indications données par l'analyse d'échappement : on peut effectuer cette transformation pour x_i si la condition (2.20) est vérifiée après ajout des `let` (ce qu'on peut très bien vérifier sans faire explicitement la transformation : on vérifie que le i^{e} paramètre de M_0 ne s'échappe pas). Il faut aussi mettre des `let` pour les x_j avec $j > i$ pour respecter l'ordre d'évaluation : x_j est évalué avant x_i.

Pour augmenter les opportunités d'allocation, on effectue aussi de l'*inlining* automatique des petites fonctions qui allouent des données, ainsi, on amène l'allocateur au niveau du `let` et on peut allouer ces données en pile. Le codage en ligne n'est effectué que s'il permet vraiment une allocation en pile supplémentaire. Sinon, on conserve la version non en ligne, pour éviter de trop transformer le programme initial. Par exemple,

```
let f x = [x] ; ; hd (f 3)
```

devient

```
hd (let x = 3 in [x])
```

puis

```
let x = 3 in letstack %t1 = [x] in hd %t1.
```

La transformation de programme prend en paramètre une expression à transformer et rend l'expression transformée et l'ensemble des `let` à mettre en dehors de l'expression courante. Ces `let` sont collectés dans un arbre dont les arêtes sont étiquetées avec des transformateurs de contexte qui définissent l'échappement des `let` jusqu'à l'expression englobante. Ces transformateurs ont été calculés pour chaque expression par la phase d'analyse. On effectue de la compression de chemin dans l'arbre en utilisant encore l'algorithme de Tarjan, pour mettre à jour les transformateurs de contexte au fur et à mesure de la remontée dans l'arbre de syntaxe abstraite du programme. Dès que le dernier `let` (dans l'ordre d'évaluation) ne s'échappe plus de l'expression courante, on le supprime de l'antiarbre et on l'écrit dans le programme. Ceci permet de placer les `letstack` de façon à ce que les données mises en pile aient la durée de vie la plus courte possible, car on n'attend pas d'avoir remonté jusqu'à l'expression englobante la plus haute pour placer le `letstack`.

Exemple 3.4 Soit la fonction suivante :

```
let rec tak (x,y,z) =
  if x>y then
    tak
     (letstack %t1=(x-1, y, z) in tak %t1,
      letstack %t2=(y-1, z, x) in tak %t2,
      letstack %t3=(z-1, x, y) in tak %t3)
  else
      z
```

`%t1`, `%t2` et `%t3` sont libérés chacun avant l'allocation du suivant, ce qui réduit la taille de la pile (l'expérience confirme que les données allouées en pile occupent 3 fois moins de place avec ce programme qu'en mettant tous les `letstack` au début.

3.6 Complexité de l'analyse

Soit n la taille du programme. Le nombre d'*eval* et de *link* effectués est en $\mathcal{O}(n)$, donc d'après le théorème 1 de [Tar79], la longueur des compressions de chemin est en $\mathcal{O}(n \log n)$. Le nombre d'équations et d'inconnues générées est donc en $\mathcal{O}(n \log n)$, ce qui donne un temps de résolution en $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ (le calcul des composantes fortement connexes est linéaire, donc dominé par l'algorithme de Knuth).

Le calcul des hauteurs des types est dominé par la taille des types (plus précisément par la somme des tailles des déclarations de types).

La transformation de programme est en $\mathcal{O}(n \log n)$ selon le même raisonnement sur l'algorithme de Tarjan.

Finalement, la complexité de l'analyse est $\mathcal{O}(n \log^2 n + t)$ où t est le temps de calcul des hauteurs des types.

Quand l'*inlining* est actif, la complexité augmente évidemment. Si I est la taille maximale d'une fonction inlinée (peut être fixée par l'utilisateur), la taille du programme résultant est au plus $n' = \mathcal{O}(nI)$, et le temps d'analyse est $\mathcal{O}(nI + n' \log n' + n \log^2 n)$ (on post-transforme juste le programme inliné. Toutes les opérations effectuées pour l'*inlining* sont linéaires si on considère comme constant le temps de recherche dans une table d'identificateurs).

3.7 Quelques détails techniques

L'analyse de chaque module est effectuée indépendamment. Pour pouvoir profiter des informations d'échappement calculées dans les modules importés, le programme écrit ces informations dans les fichiers `.cmx` à la fin de l'analyse d'un module, puis les récupère quand on utilise le module.

Le GC de Caml Special Light est un GC à deux générations, la jeune génération est traitée par un GC à recopie, alors que la vieille utilise un GC à marquage balayage [Dol95].

On a dû modifier le *Garbage Collector* pour l'adapter à la gestion de données en pile, et rendre cette gestion la moins coûteuse possible : en particulier, les données en pile ne sont parcourues lors des cycles de GC mineur que si elles sont encore vivantes au moment du cycle. Cette méthode est plus performante que de considérer que les données en pile sont des racines, car cela évite de recopier des données du tas mineur pointées par les données en pile, alors qu'en fait ces données sont peut-être inutiles.

Pour pouvoir suivre le fonctionnement de l'analyseur, on dispose d'options en ligne de commande pour afficher les informations d'échappement calculées pour les fonctions, le code optimisé du programme, les systèmes d'équations résolus, les temps passés dans les différentes phases de l'analyse. On peut également spécifier d'effectuer ou non certaines transformations de programme (*inlining*, allocations qui suppriment l'optimisation de récursion terminale par exemple).

Chapitre 4

Evaluation des performances obtenues

4.1 Machines testées

Les tests ont été effectués sur 4 machines différentes pour pouvoir observer l'impact des différences entre les processeurs. Voici les caractéristiques essentielles de ces machines :

Machines testées	Cache primaire	Cache secondaire	Autre cache	SPECint95
Alpha DEC 3000/300	8kb(I) + 8kb(D)	512kb(I+D)		Non connue
Alpha DEC 500/400	8kb(I) + 8kb(D)	96kb (I+D)	2Mb(I+D)	12
Pentium Pro 200MHz	8kb(I) + 8kb(D)	256kb(I+D)		8,20
Sparc 5 110MHz	16kb(I) + 8kb(D)	Aucun		1,59

4.2 Les programmes de test du compilateur

Le compilateur est fourni avec 10 programmes de test classiques qui nous ont servi pour nos essais :

Programmes utilisés	
taku	Calculs sur les entiers, avec allocation de n-uplets
reynolds2	Recherche dans un arbre binaire, avec création de fermetures
reynolds3	Recherche dans un arbre binaire, avec création de couples
boyer	Traitements sur les termes
kb	Algorithme de complétion de Knuth-Bendix
nucleic	Calculs flottants
fft	Transformée de Fourier rapide
sieve	Crible d'Erathostène
quicksort	Tri rapide

L'analyseur dispose de nombreuses options pour régler son comportement aussi précisément que possible. On a testé les programmes dans plusieurs configurations pour apprécier l'effet de ces options :

Codage des versions des programmes	
Tous	Préserve tous les appels terminaux
Réc.	Préserve seulement les appels terminaux récursifs
Aucun	Ne préserve aucun appel terminal

L'inlining ne change rien sauf pour kb et nucleic, donc on ne testera qu'une version pour les autres programmes. On nommera kb-inl et nucleic-inl les versions inlinées de kb et nucleic. L'allocation en pile a un effet négligeable sur fft, sieve et quicksort, qui ne seront donc pas testés dans la suite.

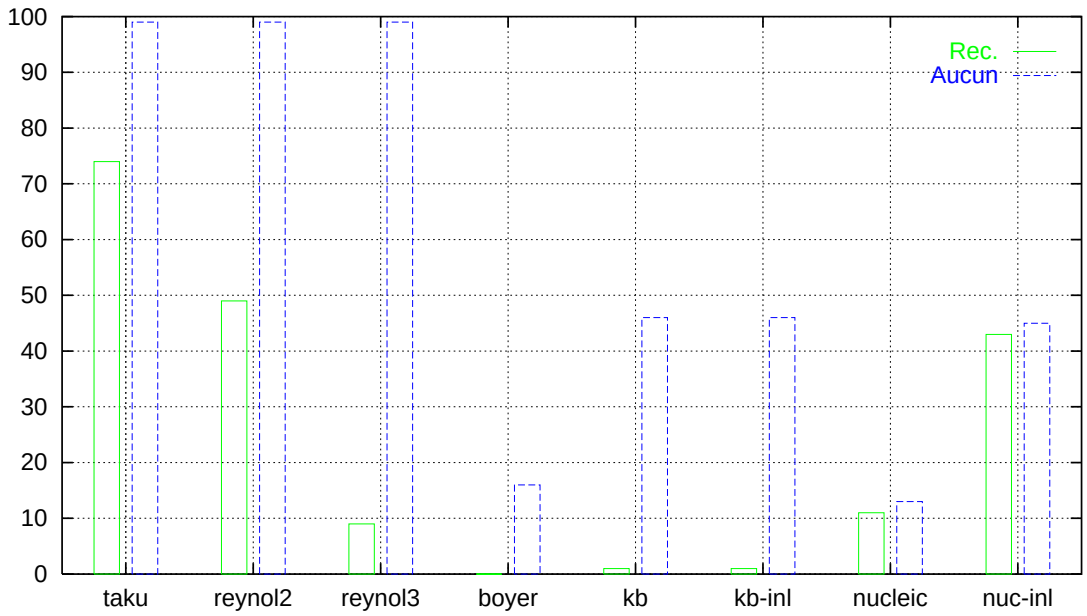


FIG. 4.1 – *Pourcentage de mémoire allouée en pile*

On se rend bien compte de l'effet qui sera obtenu à l'exécution en consultant le graphique de la figure 4.1. Il donne dans chaque cas le pourcentage de mémoire réellement allouée en pile pendant l'exécution. Toutes les versions où on ne préserve pas la récursion terminale donnent des résultats identiques entre elles ; les autres sont identiques à la version où on préserve la récursion terminale, sauf pour nucleic.

Diminution de taille mémoire en %				Taille
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	(mots)
taku	74	74	99	12723344
reynolds2	49	49	99	10487623
reynolds3	9	9	99	31460427
boyer	0	0	16	1238977
kb	1	1	46	8325579
kb-inl	1	1	46	8325579
nucleic	11	11	13	3829681
nucleic-inl	31	43	45	3829681

Il est logique de permettre plus de letstack quand on ne préserve pas la récursion terminale, mais cette transformation n'est pas sûre, car on risque une saturation de la mémoire, même si cela ne se produit pas sur les programmes de test. D'autre part, détruire l'optimisation de récursion terminale pour permettre l'allocation en pile peut se révéler dans certains cas désavantageux. C'est pourquoi dans la suite on s'intéressera à la fois aux versions qui soit préservent les appels terminaux récursifs, soit ne préservent aucun appel terminal.

Ce graphique donne déjà une idée assez précise des résultats attendus : l'effet sera faible pour boyer et kb si on préserve l'optimisation de la récursion terminale et pour nucleic. On peut attendre des améliorations plus importantes pour nucleic avec l'inlining ce qui montre l'intérêt de l'inlining pour l'allocation en pile. En effet, on ne peut allouer une donnée en pile que si son allocateur est syntaxiquement présent. L'inlining des fonctions qui allouent leur résultat permet de faire apparaître un allocateur qui était encapsulé dans une fonction. Nucleic est le seul programme qui profite vraiment de l'inlining. Quelques fonctions sont aussi inlinées dans kb, mais cela n'améliore pas nettement les performances, car ces fonctions ne manipulent pas un volume de données suffisant. Les meilleurs résultats devraient être obtenus pour taku, reynolds2 et reynolds3.

Le tableau suivant donne le pourcentage d'augmentation de la taille de la pile dû à l'allocation en pile. La dernière colonne indique la taille initiale de la pile, pour référence. Ces tests ont été effectués sur Sparc 5, mais ils dépendent peu de la machine considérée. Seuls l'alignement des données dans la pile et le nombre de registres mis temporairement en pile peuvent influer dessus.

Augmentation de taille de la pile (%)				Taille
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	(octets)
taku	25	25	29	996
reynolds2	69	71	71	692
reynolds3	45	45	107	668
boyer	0	0	1	1772
kb	58	58	165	85812
kb-inl	74	74	181	85812
nucleic	0	0	40	2236
nucleic-inl	3	3	44	2236

Ce tableau montre l'intérêt de la préservation de la récursion terminale : sur le programme kb, elle permet de limiter l'augmentation de la taille de la pile à moins de 60%, contre plus de 160% sinon. On obtient des résultats du même ordre sur taku et reynolds3, et on évite une augmentation de 40% de la taille de la pile sur nucleic et nucleic-inline. La taille de la pile reste invariante sur boyer car même si on alloue des données en pile, cela ne se fait pas au moment où la taille de la pile est à son maximum.

Les tableaux suivants donnent les diminutions de temps d'exécution sur Sparc 5, dans toutes les conditions d'exécution testées. La dernière colonne indique le temps sans allocation en pile en millisecondes pour référence. Les conditions d'exécution ont leurs valeurs par défaut : ratio de GC de 30%, tas du tas mineur 32768 mots. Les graphiques des figures 4.2 à 4.9 présentent une partie de ces informations de façon plus frappante visuellement. Les barres "Temps total" représentent le pourcentage de diminution du temps d'exécution ; les barres "Temps de GC" représentent la part de ce pourcentage due au GC et les barres "let" représentent la part due aux lets seuls (on n'a pas du tout d'allocation en pile dans ce cas. On a seulement placé des let là où il y a des letstack dans la version avec allocation en pile).

Diminution du temps d'exécution (%)				Temps
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	(ms)
taku	36	37	44	2020
reynolds2	4	5	17	8681
reynolds3	3	3	23	5814
boyer	2	-1	7	1014
kb	8	10	21	3745
kb-inl	8	12	21	3760
nucleic	1	3	3	1628
nucleic-inl	-2	5	3	1635

Les résultats obtenus ont bien le profil attendu étant donné le pourcentage de mémoire allouée en pile. L'effet est négligeable sur boyer quand on préserve la récursion ou les appels terminaux (l'incertitude sur les mesures de temps peut être évaluée à 1 à 2% environ, bien qu'on ait effectué une moyenne sur 30 exécutions pour améliorer la précision). A l'opposé, taku donne les meilleurs résultats quand on ne préserve pas la récursion terminale, puisque son temps d'exécution est presque divisé par deux. Plus généralement, la non-préservation de la récursion terminale a des effets positifs quand elle permet davantage d'allocation en pile. On peut être un peu déçu par les résultats sur nucleic, mais on constate bien que l'inlining améliore les performances de l'allocation en pile. Par contre, à lui seul (sans allocation en pile) il ralentit l'exécution, ce qui explique les mauvais résultats de la courbe "let" sur nucleic-inl. Pour les autres programmes, l'effet des lets seuls, tel qu'il apparaît sur les graphiques, est assez négligeable comme on pouvait le penser.

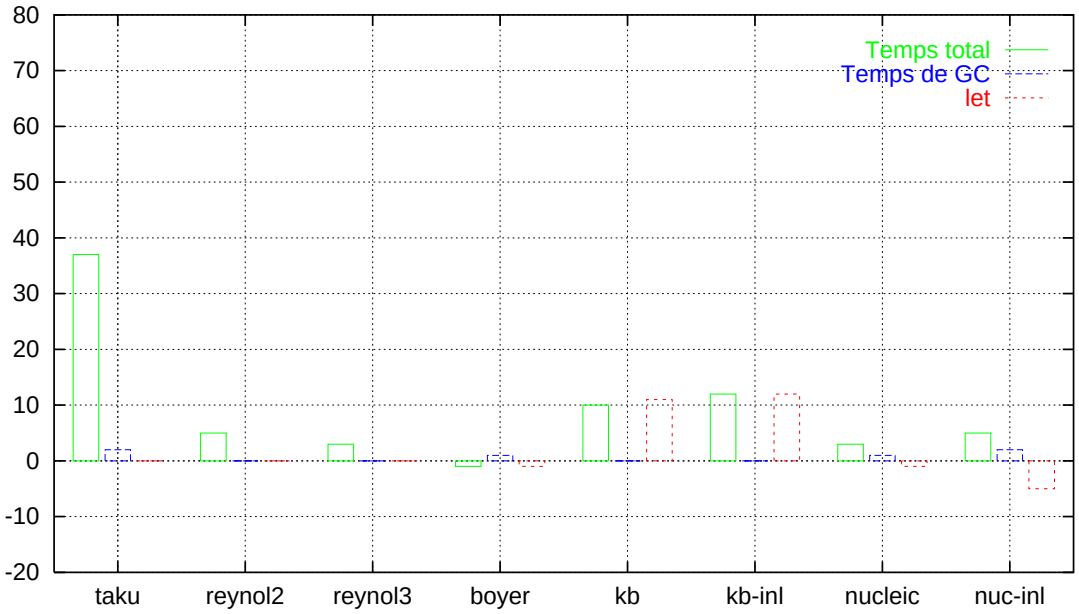


FIG. 4.2 – *Test effectué sur Sparc 5, avec préservation de la récursion terminale. Les conditions d'exécution ont leurs valeurs par défaut : ratio de GC de 30%, taille du tas mineur 32768 mots.*

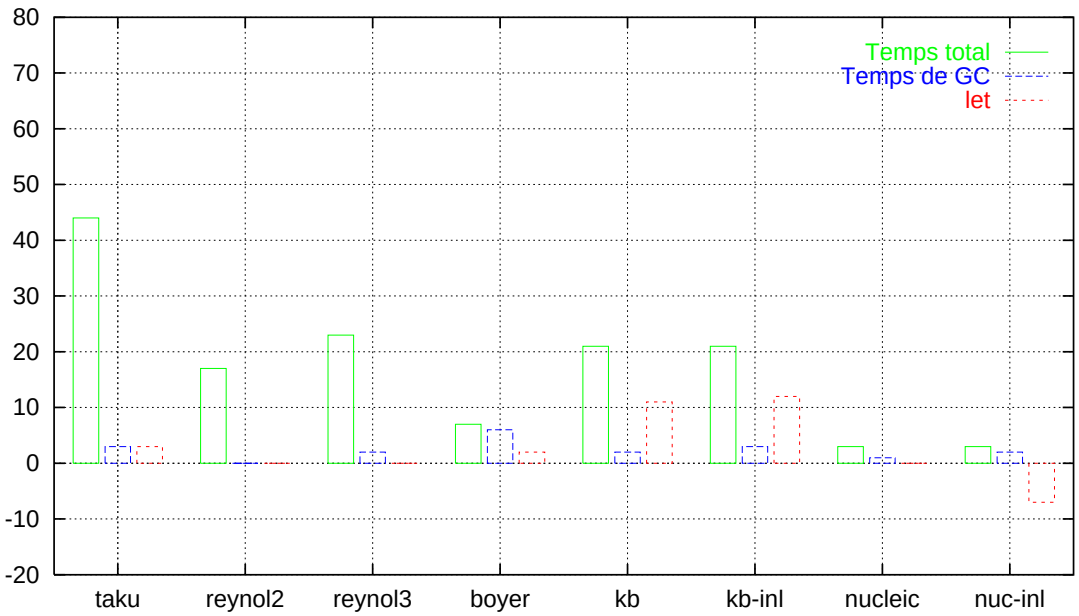


FIG. 4.3 – *Test effectué sur Sparc 5, en ne préservant aucun appel terminal*

Le placement optimal des letstack et les letstack' sont utiles car ils permettent d'augmenter de façon importante les opportunités d'allocation en pile, ce qui améliore les résultats obtenus (voir [Bla96] pour une description détaillée de l'effet de ces deux améliorations). Elles permettent aussi de diminuer la taille nécessaire en pile en optimisant la durée de vie des données.

Les tests montrent que l'effet obtenu est à peu près indépendant des paramètres du GC (voir [Bla96] pour des résultats numériques précis). Ceci peut sembler étonnant au premier abord, mais en fait les données concernées par l'allocation en pile sont pour la plupart des données à courte durée de vie, qui ont un coût nul pour le GC puisqu'elles ne sont pas parcourues lors du GC mineur. L'avantage de l'allocation en pile est de retarder les cycles de GC puisqu'il y a moins de données allouées dans le tas, mais cela dépend peu des paramètres du GC.

Le tableau suivant donne la part due au GC du gain sur le temps total. La dernière colonne donne le temps d'exécution en millisecondes sans allocation en pile, et avec le chronométrage du GC activé. La différence avec les tableaux précédents est due au temps de chronométrage.

Gain du au GC sur le temps total (%)				Temps
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	(ms)
taku	3	2	3	2241
reynolds2	0	0	0	13707
reynolds3	0	0	2	8087
boyer	1	1	6	1876
kb	0	0	2	4937
kb-inl	0	0	3	4917
nucleic	0	1	1	1942
nucleic-inl	1	2	2	1912

Le gain dû au GC sur le temps total est faible, car, comme on l'a dit, le coût des données allouées en pile ne représente qu'une faible part du coût du GC pour beaucoup de programmes. Pour les programmes dans lesquels on peut allouer toutes les données en pile, il n'y a plus de GC, mais il n'occupait de toute façon qu'une faible part du temps d'exécution. L'essentiel du gain est donc dû plutôt à un temps d'allocation plus court et à un meilleur comportement en cache, grâce à une plus grande localité des données, puisque seules les données du sommet de pile sont en général utiles.

Le tableau suivant donne le pourcentage de gain sur le temps de GC. La dernière colonne indique le temps de GC quand on ne fait pas d'allocation en pile (en ms).

Diminution du temps de GC (%)				Temps
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	de GC (ms)
taku	83	72	100	81
reynolds2	56	42	100	112
reynolds3	29	20	100	235
boyer	2	2	9	1425
kb	-1	0	6	1543
kb-inl	0	2	9	1558
nucleic	1	15	17	162
nucleic-inl	20	27	25	155

On retrouve des résultats évidemment en concordance avec le tableau précédent. L'incertitude relative de mesure est plus importante ici que sur les temps totaux car les temps mesurés sont plus petits et sont fragmentés. Comme on s'y attendait, quand on peut allouer en pile la presque totalité des données, le temps de GC s'annule (diminution de 100%).

Le programme kb présentait un phénomène de rétention des données qui diminuait les performances obtenues. En effet, certaines données étaient crues vivantes trop longtemps, car pour maintenir les données vivantes pour le GC, on considèrait comme des racines toutes les données allouées en pile. Ce comportement est sûr, mais il se peut qu'une donnée D reste dans la pile un peu plus longtemps que sa durée de vie réelle. Si un GC mineur se produit pendant ce temps, les données pointées par

D dans le tas mineur seront recopiées dans le tas majeur inutilement et cela occasionne une perte de temps. Ce problème a été résolu en modifiant le GC pour qu'il suive les références en pile lors de la recopie. Par contre, pour la phase de marquage, les données en pile sont toujours considérées comme des racines (c'est la seule méthode réalisable à cause de la disparition possible de données qui étaient dans la pile entre deux morceaux de la phase de marquage). Il faut aussi noter que la "malchance" peut être responsable d'une petite augmentation de la taille allouée dans le tas majeur. En effet, au moment d'un GC mineur, il existe toujours un petit volant de données à courte durée de vie qui sera copié dans le tas majeur parce qu'il est vivant à ce moment-là. Avec l'allocation en pile, on modifie le moment où le GC est effectué donc ces données ne sont pas les mêmes. Il se peut que leur taille soit plus importante si on fait l'allocation en pile que si on ne la fait pas.

Diminution du temps d'exécution (%) sur Pentium Pro				Temps
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	(ms)
taku	25	23	26	488
reynolds2	1	0	1	6072
reynolds3	2	0	-6	3070
boyer	0	0	5	523
kb	0	0	2	1332
kb-inl	0	0	2	1339
nucleic	6	6	0	696
nucleic-inl	6	10	5	692

Les registres flottants du processeur Pentium sont organisés en pile, et l'allocation de registres de CSL est mal adaptée à cette organisation. De ce fait, l'ajout de lets sur des flottants introduit des moves inutiles qui occasionnent une perte de temps importante. On a donc dû limiter au maximum ces ajouts en supprimant tous les letstack qui étaient introduits inutilement sur les flottants dans des situations où le compilateur est capable de les allouer dans des registres. On évite ainsi une perte de plus de 25% sur nucleic et nucleic-inline quand on ne préserve pas la récursion terminale.

La non-préservation de la récursion terminale se révèle moins avantageuse sur Pentium Pro que sur Sparc 5 (reynolds3 par exemple est plus long à s'exécuter quand on ne préserve pas la récursion terminale). L'optimisation des appels terminaux compense ici le bénéfice de l'allocation en pile ; celle-ci a donc moins d'intérêt que sur Sparc 5. On peut penser qu'une allocation en pile fait gagner plus de temps quand la taille de la donnée allouée est plus grande (car alors on économise plus de temps de GC et que le comportement en cache est amélioré pour un plus grand nombre d'accès). Il pourrait alors exister un seuil de taille de données à partir duquel l'allocation en pile devient plus avantageuse que l'optimisation des appels terminaux. Cependant ce seuil dépend de beaucoup de facteurs difficiles à cerner : le comportement en cache dépend du reste du programme ; le temps gagné sur le GC dépend non seulement de la taille de la donnée considérée mais aussi des autres données, car les données à courte durée de vie ne sont pas parcourues par le GC. L'économie vient alors d'un nombre plus faible de cycles GC mineurs. Cela permettrait quand même d'expliquer que reynolds2 gagne un peu à ne pas préserver la récursion terminale, alors que reynolds3 y perd, car reynolds2 alloue des fermetures qui sont plus grandes que les couples alloués par reynolds3.

Diminution du temps d'exécution (%) sur Alpha 3000				Temps
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	(ms)
taku	55	59	75	2696
reynolds2	-13	20	30	15470
reynolds3	2	4	47	9459
boyer	0	-2	6	1781
kb	2	4	18	4782
kb-inl	2	5	18	4793
nucleic	4	5	5	1313
nucleic-inl	6	18	20	1313

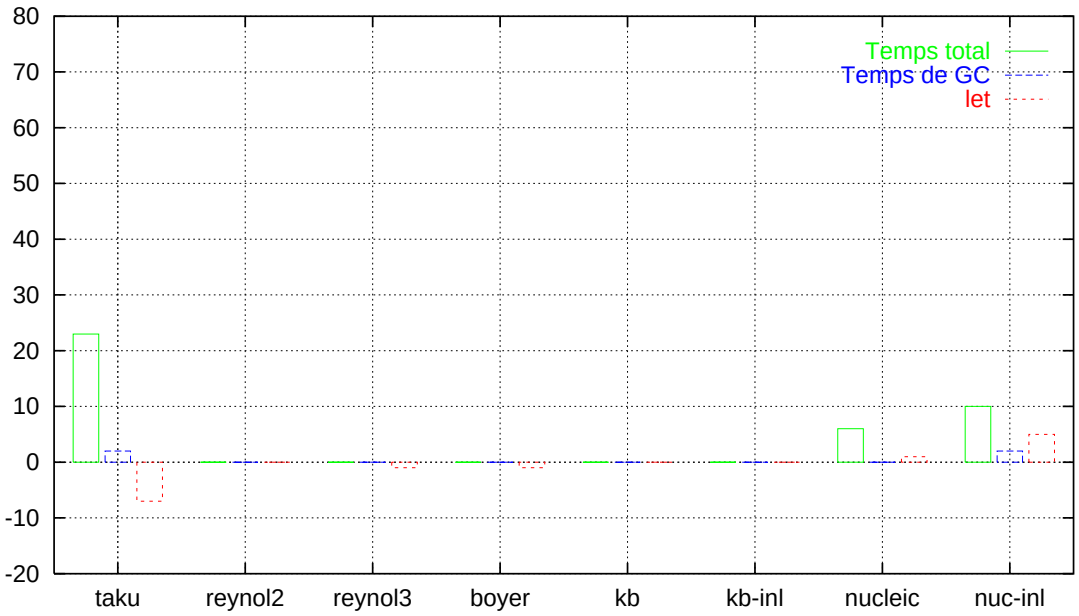


FIG. 4.4 – *Test effectué sur Pentium Pro, avec préservation de la récursion terminale*

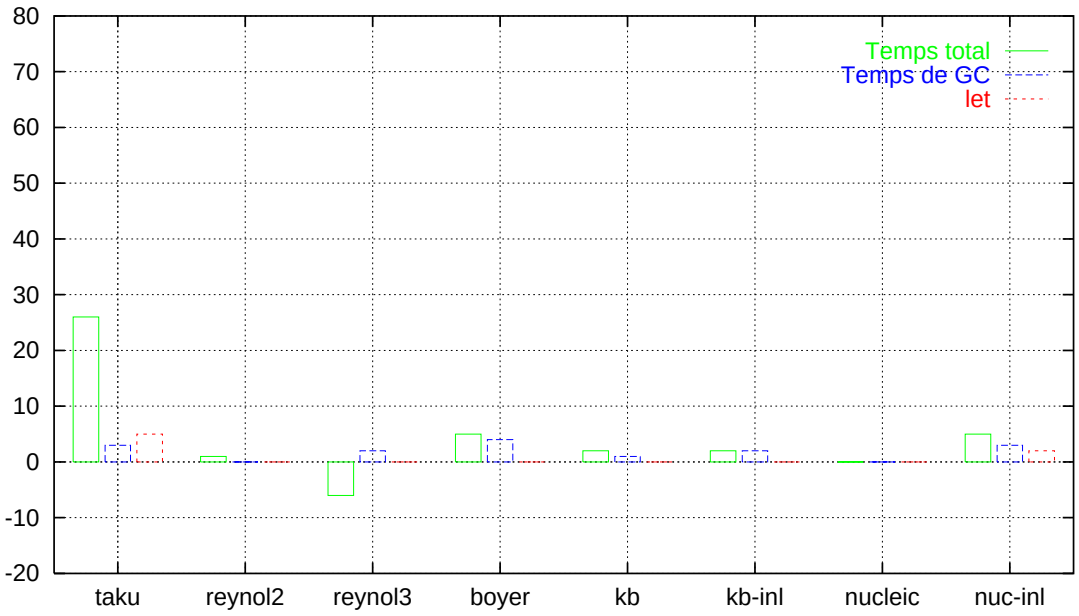


FIG. 4.5 – *Test effectué sur Pentium Pro, en ne préservant aucun appel terminal*

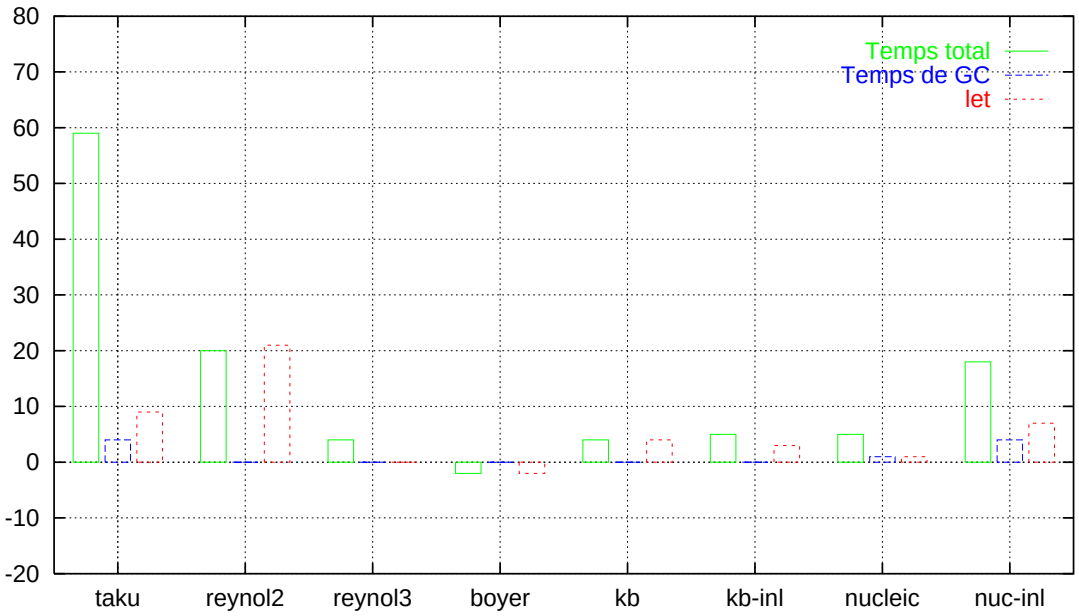


FIG. 4.6 – *Test effectué sur Alpha 3000, avec préservation de la récursion terminale*

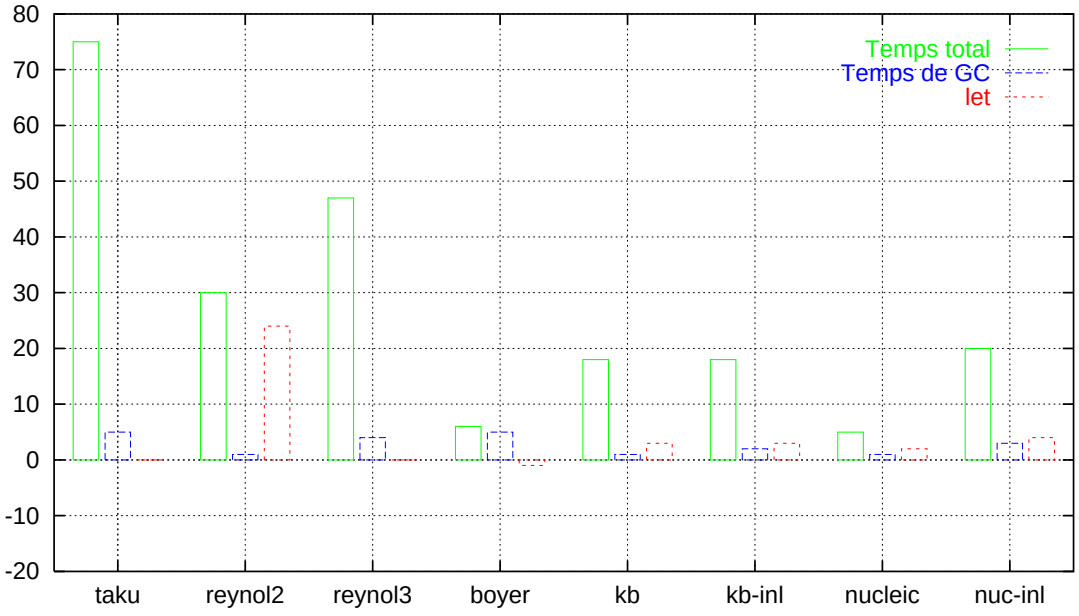


FIG. 4.7 – *Test effectué sur Alpha 3000, en ne préservant aucun appel terminal*

Sur Alpha, la non-préservation de la récursion terminale apporte un bénéfice incontestable pour tous les programmes qui allouent alors davantage en pile. Cette machine est celle qui bénéficie le plus de l'allocation en pile. Le seul résultat vraiment étrange est la perte en temps d'exécution sur reynolds2.

Diminution du temps d'exécution (%) sur Alpha 500				Temps
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	(ms)
taku	44	43	59	475
reynolds2	3	12	17	3199
reynolds3	3	3	24	1750
boyer	0	0	6	266
kb	0	0	6	753
kb-inl	0	0	6	754
nucleic	3	3	1	198
nucleic-inl	5	7	7	206

Cette machine est la plus rapide du test. Elle profite un peu moins de l'allocation en pile que l'Alpha 3000, mais donne quand même de très bons résultats. L'incertitude de mesure est plus grande que sur les autres machines testées (environ 4%).

4.3 Le compilateur lui-même

On a fait compiler par CSL son propre code (sans allocation en pile) par plusieurs versions optimisées ou non du compilateur en code natif. Pour tous ces tests, on a autorisé les letstack' et le placement optimal des letstack.

Diminution du temps d'exécution (%)				Temps
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	(s)
Sparc 5	1.5	-0.2	2.1	182.1
Pentium Pro	2.2	1	3.3	78.5
Alpha 3000	-2.6	1.5	1	319.6

Gain dû au GC sur le temps d'exécution (%)				Temps de GC
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	(s)
Sparc 5	-6.3	-3.4	-5.4	83.1
Pentium Pro	0.2	1.3	2.3	32.1
Alpha 3000	0.6	1.2	1.8	98.4

Diminution de la taille allouée dans le tas (%)				Taille
Préserve	Tous	Réc.	Aucun	(Mmots)
Sparc 5	10	16	21	100
Pentium Pro	9	14	19	87
Alpha 3000	10	16	20	96

Le pourcentage de données allouées en pile est non négligeable puisqu'il atteint environ 20% mais quand même insuffisant pour procurer une amélioration importante. On retrouve toujours que la non-préservation des appels terminaux est défavorable sur Pentium Pro alors qu'elle améliore les résultats sur Alpha. Les pertes en temps de GC sur Sparc 5 sont assez inexplicables.

4.4 Coq

Coq est un programme de démonstrateur automatique, qu'on a testé avec deux versions d'allocation en pile, en lui faisant compiler son propre jeu de benchs. Dans tous ces essais, on autorise les letstack', le placement optimal des lets et l'*inlining*.

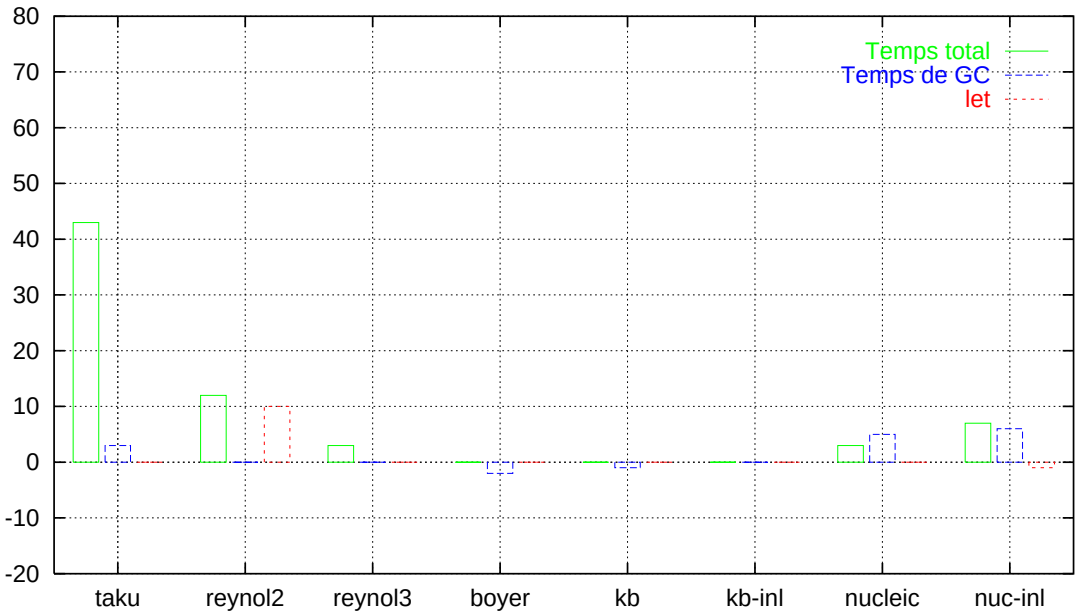


FIG. 4.8 – *Test effectué sur Alpha 500, avec préservation de la récursion terminale*

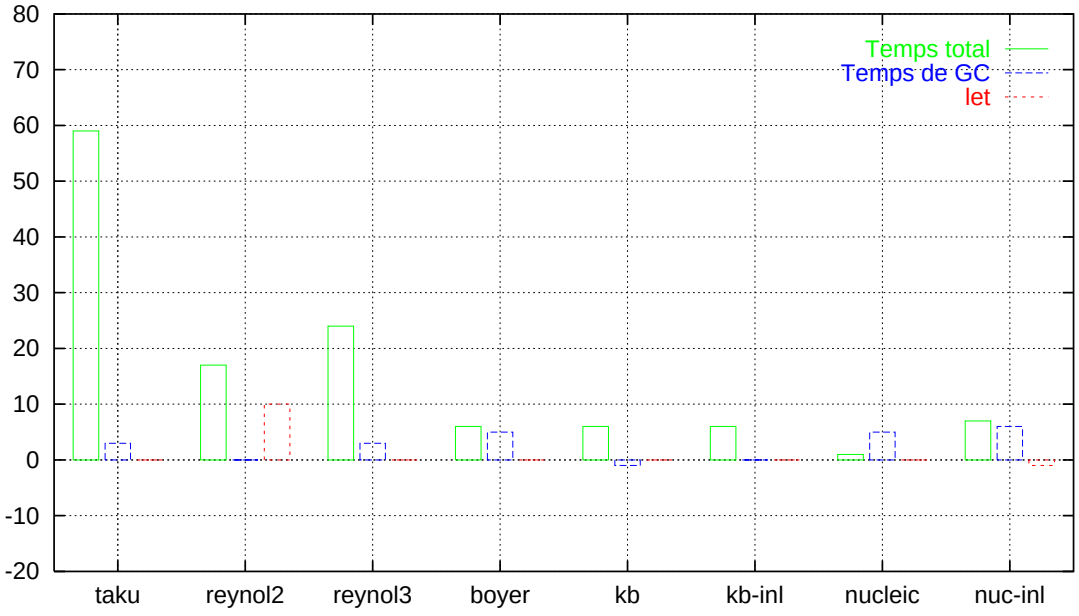


FIG. 4.9 – *Test effectué sur Alpha 500, en ne préservant aucun appel terminal*

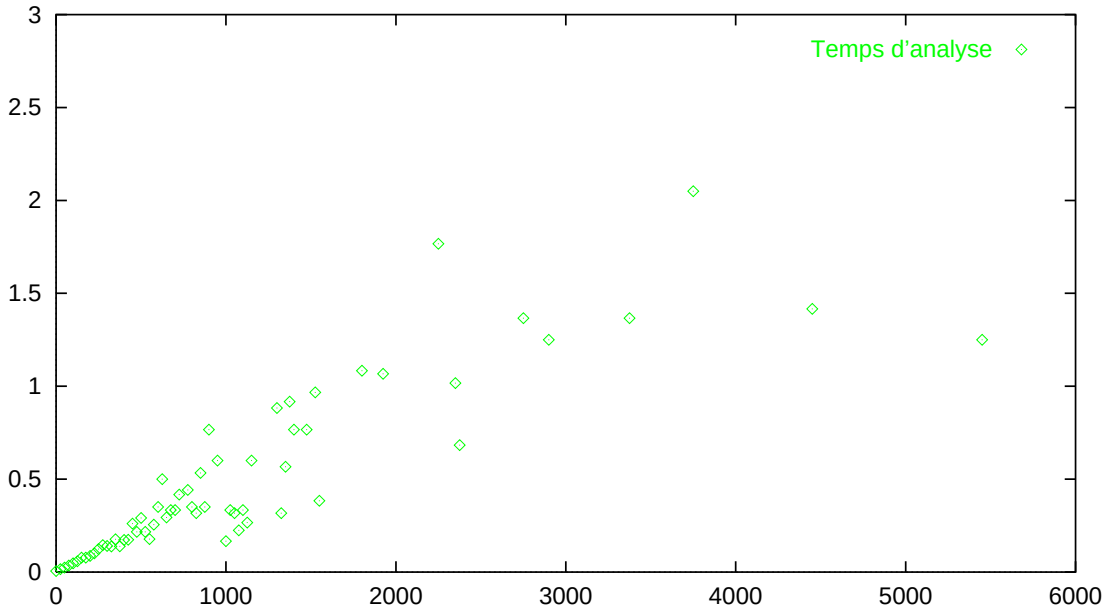


FIG. 4.10 – *Temps d'analyse en secondes en fonction de la taille de l'expression en nombre de nœuds dans l'arbre de syntaxe abstraite*

Diminution du temps d'exécution (%)			Temps
Préserve	Réc.	Aucun	(s)
Sparc 5	-2.1	3.0	5713
Pentium Pro	3.0	4.3	2339

Gain dû au GC sur le temps d'exécution (%)			Temps de GC
Préserve	Réc.	Aucun	(s)
Sparc 5	1.2	3.8	2942
Pentium Pro	1.7	2.9	1342

Au cours du test, Coq alloue 5,25 milliards de mots, et en place 17% en pile quand on préserve la récursion terminale et 25% sinon. L'inlining des petites fonctions permet d'allouer plus de données en pile (on ne peut pas en allouer plus de 11% sans inlining). Coq n'a pas pu être testé sur Alpha suite à une erreur non résolue (probablement liée au "global pointer" utilisé par l'Alpha).

4.5 Vitesse d'analyse

La vitesse de l'analyseur permet de l'utiliser pour compiler de gros programmes, Coq en est un bon exemple avec 65000 lignes. L'analyse prend 14% du temps de compilation de Coq sur Sparc 5 avec l'inlining, et la compilation est 19% plus longue au total car la compilation du code transformé est un peu plus longue que celle du code initial surtout avec l'inlining. (mais Coq ne comprend pas uniquement du code ML, donc il y a une part du travail effectué qui ne subit pas l'optimisation. Ceci montre quand même que l'analyse n'est pas trop coûteuse). La figure 4.10 montre que le temps d'analyse est quasi-linéaire. De plus, on peut analyser chaque déclaration récursive indépendamment, donc la valeur de n dans la complexité $\mathcal{O}(n \log n)$ n'est pas trop grande.

Pour compiler le compilateur lui-même, l'analyse prend 17% du temps sur Alpha 3000 mais la compilation est au total 19% plus longue. Ces chiffres sont respectivement 16% et 20% sur Sparc 5, 19% et 21% sur Pentium Pro. L'optimisation du compilateur lui-même permet de réduire ce coût. Ainsi le coût de la compilation avec optimisation sur un compilateur optimisé est 17% supérieur à celui de la

compilation sans optimisation sur un compilateur non optimisé sur Alpha 3000. Cette valeur devient 19% sur Pentium Pro et sur Sparc 5.

Pour mieux évaluer le coût des différentes parties de l'analyse, on a utilisé un profileur qui a donné les résultats suivants[1] :

Répartition du temps d'analyse en %						
Programme	Génération des équations				Résolution	Post-trans--formation
	Total	Compression de chemin	Traduction des types	Calcul des hauteurs		
taku	63	14	11	7	16	8
reynolds2	61	12	20	4	14	5
reynolds3	63	14	16	3	13	6
boyer	71	15	13	6	3	22
kb	68	14	16	7	11	9
nucleic	77	22	8	7	4	15
fft	77	16	11	3	10	7
sieve	67	11	15	4	10	10
quicksort	74	17	14	5	10	7

Ainsi, l'essentiel du temps est pris par la génération des équations sémantiques. La calcul des hauteurs des types prend un temps non négligeable, contrairement à ce qu'on pourrait penser au premier abord. Rédiger cette partie du programme de façon assez optimisée est donc un point important.

Sur certains programmes le total des 3 phases de l'analyse n'atteint pas 100%. La différence est partiellement due au prétraitement des déclarations de types, qui n'est pas pris en compte ici, et aux opérations d'initialisation de l'analyseur.

4.6 Améliorations futures

Une autre possibilité pour augmenter les opportunités d'allocation en pile serait d'effectuer de la préallocation : quand une fonction alloue son résultat, on peut allouer en pile l'espace nécessaire avant appel de la fonction puis passer à la fonction un paramètre supplémentaire qui donne l'adresse où placer le résultat. Ceci pose quelques problèmes car à cause du GC, tous les objets doivent être initialisés, et l'initialisation de l'objet avant de passer son adresse à la fonction ferait perdre du temps.

On pourrait également employer des algorithmes plus efficaces pour la compression de chemin dans les antiarbres, comme l'algorithme offline de Tarjan [Tar79]. Cependant, si cet algorithme a une complexité inférieure, $\mathcal{O}((m+n)\alpha(m+n))$ pour m compressions de chemin dans une forêt à n sommets, la constante cachée est plus grande, donc on n'observe de gain que pour des antiarbres assez grands.

Une amélioration qui concerne des détails plus techniques est la possibilité pour l'utilisateur de déclarer des informations d'échappement pour des primitives C qu'il écrit (actuellement seules les primitives de la bibliothèque standard sont prises en compte, leurs informations d'échappement étant codées en dur dans l'analyseur). On pourrait aussi réduire la taille des informations stockées dans les fichiers `.cmx` en ne conservant que les fonctions exportées dans l'interface.

Ce serait aussi intéressant d'étudier plus précisément ce qui se passe dans le cache (par exemple, le nombre d'accès à des données qui ne sont pas en cache, et le temps pris par ces accès, ou plus généralement, de simuler l'ensemble du comportement du cache).

1. Ces tests ont été réalisés sur Sparc 20 avec le compilateur écrit en bytecode, sans inlining

Chapitre 5

Conclusion

Nous avons implémenté une analyse d'échappement issue de celle de Park et Goldberg, mais nous avons considérablement réduit sa complexité par rapport aux résultats donnés dans leur article [PG92] grâce à la méthode d'A. Deutsch [Deu97]. Nous l'avons aussi étendue de façon très importante en traitant les types inductifs, les constructions impératives et (avec approximations) les fonctions d'ordre supérieur.

Les résultats obtenus par cette analyse sont tout à fait satisfaisants. L'expérimentation a montré la faisabilité de l'analyse, puisque son coût raisonnable en $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ (en supposant les hauteurs de types précalculées) permet de l'appliquer à tous les programmes au prix d'un surcoût à la compilation tout à fait acceptable, qui ne dépasse pas 20%. Elle a montré aussi l'intérêt de l'allocation en pile, puisque qu'on obtient des gains de temps importants : souvent 5 à 20%, quelquefois plus dans des cas particulièrement favorables. Les améliorations sont plus modestes pour le compilateur et pour Coq, mais peuvent quand même atteindre 3%.

Il faut remarquer que l'effet observé dépend très peu des paramètres du GC, contrairement à ce qu'on pourrait penser a priori. Les meilleurs résultats sont obtenus en ne préservant pas la récursion terminale sur Sparc 5 et Alpha. Cette solution n'est pas sûre car elle peut provoquer une saturation de la pile, mais cela ne se produit pas dans les exemples utilisés. Par contre, sur Pentium Pro, il vaut mieux préserver la récursion terminale. En effet, l'optimisation des appels terminaux compense le gain obtenu par l'allocation en pile.

Ces résultats ont été quelque peu améliorés grâce au codage en ligne des petites fonctions pour augmenter les opportunités d'allocation en pile et grâce à une meilleure adaptation du GC au stockage de données en pile. La bonne qualité du GC de Caml Special Light réduit cependant les possibilités de gain.

Enfin, ce travail peut être adapté aux versions les plus récentes de Caml Light, Objective Caml, en vue d'une distribution.

Bibliographie

[Abr86] S. Abramsky. – Strictness Analysis and Polymorphic Invariance. *In : Proc. Programs as Data Objects.* – Springer Verlag.

[AFL95] Alexander Aiken, Manuel Fähndrich et Raph Levien. – Better Static Memory Management : Improving Region-Based Analysis of Higher-Order Languages. *In : PLDI95.* – San Diego, California, June 1995.

[App87] Andrew W. Appel. – Garbage Collection can be faster than Stack Allocation. *Information Processing Letters*, vol. 25, n° 4, janvier 1987, pp. 275 – 279.

[AS93] Andrew W. Appel et Zhong Shao. – An Empirical and Analytic Study of Stack vs. Heap Cost for Languages with Closures. *Journal of Functional Programming*, vol. 1, n° 1, janvier 1993, pp. 1 – 27.

[Bla96] Bruno Blanchet. – *Garbage Collection statique.* – rapport de DEA, Rocquencourt, INRIA, septembre 1996.

[BTV96] Lars Birkedal, Mads Tofte et Magnus Vejlstrup. – From Region Inference to von Neumann Machines via Region Representation Inference. *In : 23rd Annual ACM SIGPLAN-SIGACT Symposium on Principles of Programming Languages (POPL '96).* – St. Petersburg Beach, Florida, 21-24 janvier 1996.

[Bur90] G.L. Burn. – A Relationship Between Abstract Interpretation and Projection Analysis. *In : Principles of Programming Languages.* pp. 151–156. – ACM.

[CC77] Patrick Cousot et Radhia Cousot. – Abstract interpretation : a unified lattice model for static analysis of programs by construction or approximation of fixpoints. *In : Conference Record of the 4th Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 238 – 252. – Los Angeles, California, janvier 1977.

[CC79] Patrick Cousot et Radhia Cousot. – Systematic Design of Program Analysis Frameworks. *In : Conference Record of the Sixth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 269 – 282. – San Antonio, Texas, 29-31 janvier 1979.

[CC92] Patrick Cousot et Radhia Cousot. – Abstract Interpretation Frameworks. *Journal of Logic and Computation*, vol. 2, n° 4, août 1992, pp. 511–547.

[Cha88] David R. Chase. – Safety considerations for storage allocation optimizations. *In : Proceedings of the SIGPLAN '88 Conference on Programming Language Design and Implementation.* pp. 1 – 10. – ACM Press.

[CLR94] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson et Ronald L. Rivest. – *Introduction à l'algorithmique.* – Dunod, 1994.

[CMT94] Steve Carr, Kathryn S. McKinley et Chau-Wen Tseng. – Compiler Optimizations for Improving Data Locality. *In : Sixth International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems*, pp. 252 – 262.

[Deu90] Alain DEUTSCH. – On determining lifetime and aliasing of dynamically allocated data in higher-order functional specifications. *In : Seventeenth Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 157 – 168. – San Francisco, janvier 1990.

[Deu92] Alain DEUTSCH. – A Storeless Model of Aliasing and its Abstractions using Finite Representations of Right-Regular Equivalence Relations. *In : Proceedings of the IEEE 1992 International Conference on Computer Languages.* pp. 2 – 13. – Oakland, California, avril 1992.

[Deu94] Alain DEUTSCH. – Interprocedural May-Alias Analysis for Pointers : Beyond k-limiting. *In : Proceedings of the SIGPLAN '94 Conference on Programming Language Design and Implementation.* pp. 230 – 241. – ACM Press.

[Deu97] Alain DEUTSCH. – On the Complexity of Escape Analysis. *In : 24th Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL '97).*

[Dol95] Damien DOLIGEZ. – *Conception, réalisation et certification d'un glaneur de cellules concurrent.* – Thèse de PhD, Université Paris VII, mai 1995.

[Han95] John HANNAN. – A Type-based Analysis for Stack Allocation in Functional Languages. *In : Proceedings of the Second International Static Analysis Symposium (SAS '95).*

[Har89] W. HARRISON. – The interprocedural analysis and automatic parallelisation of Scheme programs. *Lisp and Symbolic Computation*, vol. 2, 1989, pp. 176 – 396.

[Hed88] Lucy HEDERMAN. – *Compile Time Garbage Collection Using Reference Count Analysis.* – Rapport technique n° Rice COMP TR88-75, Houston, Texas, Rice University, août 1988.

[Hic93] James HICKS. – Experiences with Compiler-Directed Storage Reclamation. *In : Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture (FPCA'93).* – Copenhagen, Denmark, 9-11 juin 1993.

[HMT89] Robert HARPER, Robin MILNER et Mads TOFTE. – *The Definition of Standard ML.* – LFCS Report Series n° ECS-LFCS-89-81, Laboratory for Foundations of Computer Science, Dept. of Computer Science, University of Edinburgh, mai 1989.

[Hoa78] C.A.R. HOARE. – Some properties of predicate transformers. *Journal of the ACM*, vol. 25, n° 3, juillet 1978, pp. 461 – 480.

[Hud86] Paul HUDAK. – A Semantic Model of Reference Counting and its Abstraction (Detailed Summary). *In : Proceedings of the 1986 ACM Conference on LISP and functional programming*, pp. 351 – 363.

[Hug88] John HUGHES. – Backward Analysis of Functional Programs. *In : Partial Evaluation and Mixed Computation*, éd. par D. BJØRNER, A. P. ERSHOV et N. D. JONES. – Elsevier Science Publishers B.V. (North Holland).

[Hug92] Simon HUGHES. – Compile-Time Garbage Collection for Higher-Order Functional Languages. *J. Logic Computat.*, vol. 2, n° 4, 1992, pp. 483 – 509.

[ISY88] Katsuro INOUE, Hiroyuki SEKI et Hikaru YAGI. – Analysis of Functional Programs to Detect Run-Time Garbage Cells. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems*, vol. 10, n° 4, octobre 1988, pp. 555 – 578.

[JM82] N. D. JONES et S. MUCHNICK. – A flexible approach to interprocedural data flow analysis and programs with recursive data structures. *In : Nineth Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages*, pp. 66 – 74.

[JW90] Simon B. JONES et Michael WHITE. – Is Compile Time Garbage Collection Worth the Effort. *In : Workshop on Functional Programming.* – Glasgow, 1990.

[Knu77] Donald E. KNUTH. – A Generalization of Dijkstra's Algorithm. *Information Processing Letters*, vol. 6, n° 1, février 1977, pp. 1 – 5.

[Moh95a] Markus MOHNEN. – Efficient Closure Utilisation by Higher-Order Inheritance Analysis. *In : Static Analysis Symposium (SAS'95).*

[Moh95b] Markus MOHNEN. – Efficient Compile-Time Garbage Collection for Arbitrary Data Structure. *In : PLILP'95.*

[NPD87] Anne NEYRINCK, Prakash PANANGADEN et A.J. DEMERS. – Computation of aliases and support sets. *In : Fourteenth Annual ACM Symp. on Principles of Programming Languages.* ACM Press, pp. 274–283.

[PG92] Young Gil PARK et Benjamin GOLDBERG. – Escape Analysis on Lists. *In : Proceedings of the ACM SIGPLAN '92 Conference on Programming Language Design and Implementation*, pp. 116 – 127. – San Francisco, California, 17-19 juillet 1992.

[Ram93] G. RAMALINGAM. – *Bounded Incremental Computation.* – Rapport technique n° 1172, Madison, University of Wisconsin, août 1993.

[RM88] Cristina RUGGIERI et Thomas P. MURTAGH. – Lifetime Analysis of Dynamically Allocated Objects. *In : Proceedings of the Fifteenth Annual ACM SIGACT-SIGPLAN Symposium on Principles of Programming Languages (POPL '88)*, pp. 285 – 293. – San Diego, California, 13-15 janvier 1988.

[Sch78] Jerald SCHWARTZ. – Verifying the safe Use of Destructive Operators in Applicative Programs. *In : Transformations de programmes. Actes du 3e colloque international sur la programmation*, éd. par B. ROBINET, pp. 395 – 411.

[SF96] Manuel SERRANO et Marc FEELEY. – Storage Use Analysis and its Applications. *In : 1996 ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP).* – Philadelphia, Pennsylvania, 24-26 mai 1996.

[Shi88] O. SHIVERS. – Control flow analysis in Scheme. *Conference on Programming Language, Design and Implementation*, juin 1988, pp. 164 – 174.

[Tar74] Robert TARJAN. – Finding dominators in Directed Graphs. *SIAM Journal of Computing*, vol. 3, n° 1, mars 1974, pp. 62 – 89.

[Tar79] Robert Endre TARJAN. – Applications of Path Compression on Balanced Trees. *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 26, n° 4, octobre 1979, pp. 690 – 715.

[TT93] Mads TOFTE et Jean-Pierre TALPIN. – *A theory of Stack Allocation in Polymorphically Typed Languages.* – Rapport technique n° 93/15, Departement of Computer Science, Copenhagen University, 9 juillet 1993.